集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 15 回

2023 年 1 月 20 日

今回の内容

15.1 集合の帰納的な定義

数学的帰納法では、すべての自然数 n について $A(n)$ が真であることを、base case と induction step の 2 つを示すことで証明しますが、これとよく似た原理で、集合を定義することがあります。例えば、「A」と「B」の 2 種類の文字を 1 つ以上並べてできる文字列で、「ABBA」や「BBABB」のように、前後対称になっているようなものの全体 S は次のように定義することができます。

(1) A、B、AA、BB の 4 つの文字列は、どれも S に属する。

(2) 文字列 x が S に属するならば、x の前後に A を 1 文字ずつ付け加えてできる文字列 $\mathrm{A}\,x\,\mathrm{A}$ と、x の前後に B を 1 文字ずつ付け加えてできる文字列 $\mathrm{B}\,x\,\mathrm{B}$ は、どちらも S に属する。

(3) 上の (1) と (2) で S の要素とわかるものだけが S に属する。

このような定義を「(集合の)**帰納的な定義**」と呼び、一般的には次のような形となります。

(1) その集合に必ず属するものを示す。

(2) その集合の要素を使って、その集合の (新しい) 要素を作って示す。

(3) その集合の要素は、(1) と (2) で属するとわかるものだけであると限定する。

メモ

(1) と (2) が、それぞれ数学的帰納法の base case と induction step に対応していることに注意してください。(3) は、定義される集合に余計な要素が含まれていないことを言っており、集合を一意に定めるために必要です。例えば、前後対称な文字列の集合の帰納的定義の場合、すべての文字列からなる集合は、(1) と (2) の条件を満たしますので、(3) がないと S が一意に定まりません。

注意 (3) の条件は、(1) と (2) を満たすような集合の中で最小のものが S であることを意味しています。文字列全体の集合を U とし、C を、(1) と (2) をともに満たすような U の部分集合 S をすべて集めてできる集合とします。つまり、

$$C = \{\, S \in \mathcal{P}(U) \mid S \text{ は } (1) \text{ と } (2) \text{ を満たす} \,\}$$

です。集合 C は、文字列の集合を要素とする集合となります。上の帰納的な定義によって定まる S は、C のすべての要素に属するような文字列全体、つまり

$$S = \{\, x \in U \mid \forall S' \in C.\, x \in S' \,\}$$

となります[1]。

注意　「集合 ... を次のように帰納的に定義する」のように「帰納的な定義」であると明示する場合は、(3) の条件は暗黙に課されているものとして省略することがあります。

注意　第 1 回では、命題論理で使われる「論理式」を以下のように定義しましたが、これも集合の帰納的な定義の一つに他なりません。(1) と (2) が base case に、(3) が induction step に対応しています。

(1) $\top$ と $\bot$ はそれぞれ論理式である。

(2) $X,\ Y,\ Z,\ \ldots$ は論理式である。

(3) $A,\ B$ が論理式ならば次の 4 つも論理式である。

$$(\neg A) \qquad (A \wedge B) \qquad (A \vee B) \qquad (A \Rightarrow B)$$

(4) 上の (1)、(2)、(3) で論理式とわかるものだけが論理式である。

メモ

写像の帰納的定義　帰納的定義は写像を定義する際にも使われます。次は、自然数全体 $\mathbb{N}$ から自然数全体 $\mathbb{N}$ への写像 fib を帰納的に定義したものです。

(1) $\mathit{fib}(1) = \mathit{fib}(2) = 1$

(2) $\mathit{fib}(k+2) = \mathit{fib}(k) + \mathit{fib}(k+1) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

一見、この定義は集合の帰納的定義とは異っているように見えますが、一般に、集合 A から集合 B への写像 f は、直積集合 $A \times B$ の部分集合

$$\{\, \langle x,\ y \rangle \in A \times B \mid y = f(x) \,\}$$

と考えることができますので、写像 fib を $\mathbb{N}^2$ の部分集合とみなすと、先の fib の定義は、この部分集合を次のように帰納的に定義したものと考えることができます。

[1] この S も (1) と (2) の条件を満たします。

(1) $\langle 1,\ 1\rangle$ と $\langle 2,\ 1\rangle$ は fib に属する。

(2) $\langle k,\ x\rangle$ と $\langle k+1,\ y\rangle$ がともに fib に属するのであれば、$\langle k+2,\ x+y\rangle$ も fib に属する。

(3) 上の (1) と (2) で属するとわかるものだけが fib の要素である。

注意　漸化式を使って

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

のように定義される無限数列 $\{\, a_n \}$ を考えると[2]、$\mathit{fib}(n)$ は、この数列の第 n 項となります。一般に、漸化式による無限数列の定義は、写像の帰納的定義の一種に他なりません。

関係の帰納的定義　写像と同様に、関係も直積集合の部分集合とみなせますので、関係も帰納的に定義することがあります。例えば、自然数の大小関係 $\leqq$ は、

(1) $1 \leqq 1$

(2) $m \leqq n$ ならば、$m \leqq n+1$ かつ $m+1 \leqq n+1$

(3) 上の (1) と (2) でそうとわかるもののみについて $m \leqq n$ である

のように帰納的に定義することが可能です。

メモ

15.2　付録: 科目内容のポイント

この科目[3] は、集合と論理について勉強しました。以下のようなポイントを中心に自分の理解をチェックしてください。

1. 否定や論理積、論理和、含意といった論理演算がどのようなものか理解できましたか?
2. 命題変数を含む論理式の真理値表が書けますか?
3. 論理式の充足可能性や恒真性とはどういうことか理解できましたか?
4. 論理演算の基本的な性質 (交換律、結合律、吸収律、分配律、相補律、べき等律、ド・モルガン律など) が理解できましたか?

[2] この数列 $\{\, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \}$ は**フィボナッチ数列**と呼ばれています。

[3]「集合と位相及び演習」の受講者の場合は、その中野担当部分

5. 与えられた論理式を同値でより簡単な論理式に変形することができますか?
6. 基本的な推論の規則、特に、「含意の導入」や「両刀論法」、「否定の導入」、「背理法」、「全称量化子の導入」、「存在量化子の除去」がどのようなものか理解できましたか?
7. 量化子を含む論理式の意味が理解できましたか?
8. 変数の自由な出現と束縛された出現の違いが理解できましたか?
9. 集合に関する演算の基本的な性質 (交換律、結合律、吸収律、分配律、相補律、べき等律、ド・モルガン律など) が理解できましたか?
10. 集合の共通部分や和集合、補集合、べき集合がどのような集合か理解できましたか?
11. 直積集合とはどのようなものか理解できましたか?
12. 関係や写像が直積集合の部分集合とみなせることを理解できましたか?
13. 写像が二項関係の一種であることを理解できましたか?
14. 同値関係や半順序関係、全順序関係がどのような二項関係であるか理解できましたか?
15. 同値類や商集合とはどのようなものであるか理解できましたか?
16. 辞書式順序とはどのようなものか理解できましたか?
17. 最大要素、最小要素、極大要素、極小要素、上界、下界、上限、下限とは何か理解できましたか?
18. 単射や全射がどのような写像であるか理解できましたか?
19. 集合の濃度が単射や全射によって比較されることを理解できましたか?
20. 無限集合の濃度が様々であることを理解できましたか?
21. 論理演算と集合演算に共通する性質があることを理解できましたか?
22. 論理演算と集合演算に関する性質に双対性があることを理解できましたか?
23. 論理演算と集合演算がブール代数の一種であることが理解できましたか?
24. ブール代数の公理から様々な性質が導かれることが理解できましたか?
25. グラフや木がどのようなものであるか理解できましたか?
26. 数学的帰納法やその応用である累積帰納法がどのような推論の方法であるか理解できましたか?

集合と論理 (集合と位相及び演習) ・第 15 回・終わり