集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 14 回

2023 年 1 月 13 日

今回の内容

14.1 数学的帰納法 . . . . 14−1
14.2 累積帰納法 . . . . 14−3

14.1 数学的帰納法

自然数を表す変数 n が自由に出現する (かもしれない) 論理式 $A(n)$ に対して、次の二つを示すことで、$\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)$ が成立することを導く推論を「(n に関する)**数学的帰納法** (mathematical induction)」と呼びます。

(i) $A(1)$ である。

(ii) 任意の自然数 k について、$A(k)$ ならば $A(k+1)$ である。

数学的帰納法を使う際に示さないといけない (i) は「base case」、(ii) は「induction step」と呼ばれます。(ii) の induction step を示す際には、$A(k)$ を仮定して $A(k+1)$ を導くことになりますが、このときの $A(k)$ を「帰納法の仮定」と呼びます。

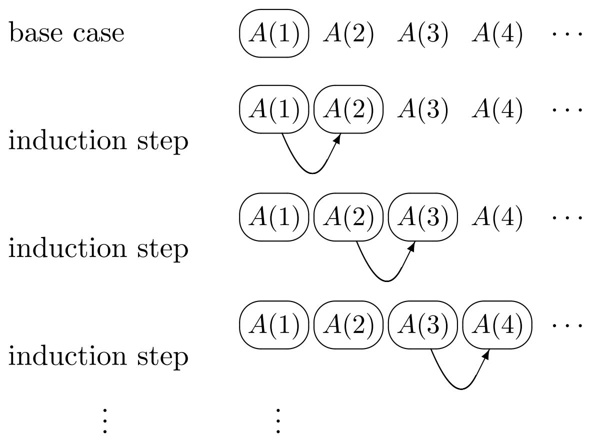


図 1: 数学的帰納法

注意 Base case で、$A(1)$ の代りに $A(0)$ を示し、induction step で、任意の非負の整数 k について、$A(k)$ ならば $A(k+1)$ であることを示せば、数学的帰納法によって、すべての非負の整数 n について $A(n)$ が成り立つ、ということを導くこともできます。

メモ

注意　第2回で使ったような推論の規則の書き表し方では、数学的帰納法は

$$\frac{A(1) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.\ A(k) \Rightarrow A(k+1)}{\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)}$$

あるいは、

$$\dfrac{A(1) \qquad \begin{array}{c}[k \in \mathbb{N}]\ [A(k)] \\ \vdots \\ A(k+1)\end{array} \qquad k \text{ は } k \in \mathbb{N} \text{ や } A(k) \text{ 以外の仮定に自由に現れていない}}{\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)}$$

と表現することができます[1]。

注意　本来「帰納 (induction)」という言葉は「観察の結果 (経験) を一般化して結論を導く」という形の論法を指します[2]。例えば、「昨日は西の方角に日は沈んだ」、「一昨日も西の方角に日は沈んだ」「その前の日も西の方角に日は沈んだ」、「さらにその前の日も西の方角に日は沈んだ」、. . . 、ゆえに、「西の方角に日は沈む」といった論法です。しかし、このような論法は決して論理的とは言えません。「雀は飛ぶ」、「つばめは飛ぶ」、「鳩は飛ぶ」、「白鳥は飛ぶ」、「鷹はとぶ」. . . 、ゆえに、「鳥は飛ぶ」と言うのが正しくないのと同じです。一方、数学的帰納法は、「帰納」という言葉が使われてはいるものの論理的な推論の方法の一つです。

メモ

数学的帰納法を使った証明の例　数学的帰納法を使った証明の例を紹介します。袋の中に、白石が w 個、黒石が b 個入っていて、ここから

> 無作為に石を2つ取り出して、2つの石の色を調べ、同じ色なら黒石を1つ袋に追加し、
> 異なる色なら白石を1つ袋に追加する

という手順を繰り返します。ただし、$w + b \geqq 2$ です。このとき、次の命題が成り立ちます。

> **命題**　最後に袋に1つ残る石の色が白 $\iff$ w が奇数

1回の手順で袋の中の石は1つ減りますので、$w + b - 1$ 回の手順で袋の中の石が1個になります。この回数 $w + b - 1$ を n とし、任意の自然数 n について上の命題が成り立つことを数学的帰納法で示します。

---

[1] n が $A(n)$ に出現していなくても構いません。n が出現しない場合は、$A(1)$、$A(k)$、$A(k+1)$、$A(n)$ はすべて同一の論理式となりますので、この推論規則を使う意味はありませんが、推論自体は正しい推論となります。

[2] 一方、論理的な推論により結論を導くことを「演繹 (dedcution)」と言います。

まず、base case として、$n = 1$ の場合を考えます。このとき、$w + b = n + 1 = 2$、つまり、袋に入っていた石の数は 2 です。最後に残った石、つまり、追加した石が白なら、取り出した 2 つの石は白と黒だったはずですから、$w = 1$ で、確かに w は奇数です。逆に、w が奇数であれば、$w = b = 1$ のはずですから、取り出される石は白と黒で、白石が追加され、最後に残る石は白となります。つまり、$n = 1$ のときは先の命題が成り立ちます。

次に、induction step を示します。$n = k$ のとき、先の命題が成り立つと仮定します。これが「帰納法の仮定」となります。ここで $n = w+b-1 = k+1$ の場合を考え、帰納法の仮定の下では、この場合も同じ命題が成り立つことを導きます。1 回目の手順の後の袋の中の白石の数を w' とすると、取り出した 2 つの石の色が「白白」であれば $w' = w - 2$ であり、そうでなければ $w' = w$ となります。このとき、袋の中の石の総数は 1 つ減っていますので、帰納法の仮定により

$$\text{最後に袋に 1 つ残る石の色が白} \iff w' \text{ が奇数}$$

が成り立ちます。ところが、w' と w の偶奇は同じなので、先の命題が $n = k + 1$ の場合も成り立つことが分かります。 (証明終り)

メモ

14.2 累積帰納法

$B(n) = \forall m \in \mathbb{N}.\ m \leqq n \Rightarrow A(m)$ のとき、数学的帰納法を使って、$\forall n \in \mathbb{N}.\ B(n)$ を証明することを考えると、base case や induction step は、それぞれ、次のようになります。

(i) $\forall m \in \mathbb{N}.\ m \leqq 1 \Rightarrow A(m)$

(ii) 任意の自然数 k について、$(\forall m \in \mathbb{N}.\ m \leqq k \Rightarrow A(m))$ ならば $(\forall m \in \mathbb{N}.\ m \leqq k+1 \Rightarrow A(m))$

一方、数学的帰納法で導かれる $\forall n \in \mathbb{N}.\ B(n)$ について考えると、

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}.\ B(n) &\iff \forall n \in \mathbb{N}.\ \forall m \in \mathbb{N}.\ m \leqq n \Rightarrow A(m)\\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)\end{aligned}$$

ですので、(i) と (ii) を示すことができれば、$\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)$ が数学的帰納法で導かれることになります。ここで、(i) と (ii) を少し整理すると、

(i′) $A(1)$

(ii′) 任意の自然数 k について、$(\forall m \in \mathbb{N}.\ m \leqq k \Rightarrow A(m))$ ならば $A(k + 1)$

とできます。この、(i′) と (ii′) を示すことで、$\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)$ を論証する方法は「**累積帰納法** (course of values induction)」と呼ばれます。累積帰納法は、数学的帰納法を応用した推論の方法の 1 つです。また、(i′) と (ii′) の 2 つは

(∗) 任意の自然数 k について、$(\forall m \in \mathbb{N}.\ m < k \Rightarrow A(m))$ ならば $A(k)$

とまとめることもできますので、(∗) さえ示すことができれば、累積帰納法により $\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)$ を導びいてよいということになります。

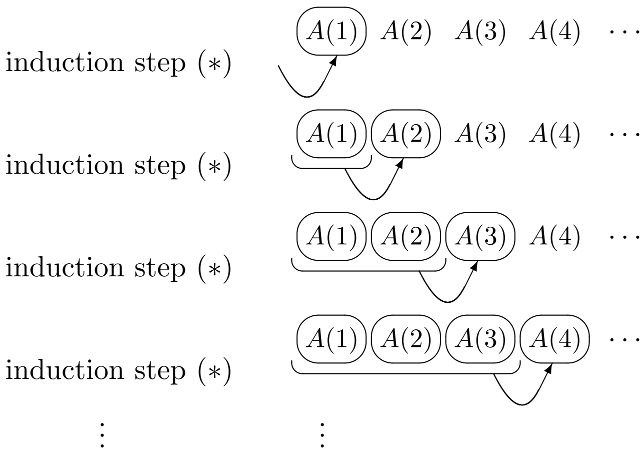


図 2: 累積帰納法

メモ

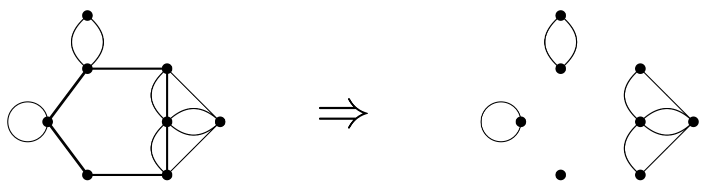
累積帰納法を使った証明の例　前回、少なくとも 1 つの辺を持つ連結な有限グラフ G がオイラー閉路を持つことの必要十分条件は、G のすべての頂点の次数が偶数であることを紹介しましたが、これを G の辺の数に関する数学的帰納法 (累積帰納法) を使って証明してみます。「オイラー閉路」とは「グラフのある頂点から出発して、すべての辺をちょうど 1 回ずつ通って、もとの頂点に戻ってくるような経路」のことでした。

　まず、必要条件であることを示すために、オイラー閉路を持つ連結な有限グラフの頂点の次数がすべて偶数であること示します。G をオイラー閉路を持つ連結な有限グラフと仮定します。G の 1 つの頂点 v に着目したとき、v を端点とする辺がないのなら、v の次数は 0 で偶数です。そこで、v を端点とする辺 e が存在する場合を考えます。オイラー閉路を辿ったとき、v 以外の頂点から、この e を通って v にやってくるのなら、v から出ていくときに通る別の辺 e' があるはずですし、v から e を通って、v とは異なる頂点へ出て行くのなら、v 以外の頂点から v にやって来たときに通った別の辺 e' があるはずです。これは、v がオイラー閉路の始点 (終点) であったとしても同じ

です。つまり、v 以外の頂点と v を結ぶ辺については、出る辺と入る辺を対にできます。また、v から出て v に戻る辺 (ループ) は、v の次数としては 2 と数えることになっていましたので、結局、v の次数は偶数となります。

次に、十分条件であること、つまり、1 つ以上の辺を持ち、頂点の次数がすべて偶数である連結な有限グラフ G にはオイラー閉路が存在することを、G の辺の数に関する数学的帰納法 (累積帰納法) で証明します。頂点の次数がすべて偶数である連結な有限グラフについて、辺の数が k 未満であればオイラー閉路が存在すると仮定します。ただし、k は自然数 (正の整数) です。これを帰納法の仮定として、辺の数が k である場合もオイラー閉路が存在することを示します。

頂点の次数がすべて偶数である連結な有限グラフ G が与えられていて、その辺の数が k であるとします。$k > 0$ なので、G は少なくとも 1 つの辺 e を持ちます。この辺の一方の端点 v から、辺 e を辿り、さらに、同じ辺を 2 度通らないようにして、次々と辺を辿っていくと、いつかは v に戻ってきます。なぜなら、すべての頂点の次数は偶数ですので、v 以外の頂点で行き止まりとなることはなく、一方、有限個の辺しか存在しないので、無限に新しい辺を辿ることができないからです。この経路 (閉路) を C とします。



G (太線の閉路が C)　　　G' (4 つの連結なグラフに分割された)

C 中の辺を G からすべて取り除いてできるグラフを G' とすると、G' はいくつかの連結なグラフ $G'_1, G'_2, \ldots, G'_n$ に分割されます。これらのグラフの辺の数は、どれも k 未満で、どの頂点の次数も偶数となりますから、(累積) 帰納法の仮定より、それぞれ、辺の数が 0 でない限りはオイラー閉路を持ちます。また、元の G は連結でしたので、$G'_1, G'_2, \ldots, G'_n$ は、それぞれ、少なくとも 1 つの頂点を C と共有しています。このような共有点を、それぞれ 1 つ選んで、$v_1, v_2, \ldots, v_n$ とします。ここで、v から始まる経路 C の途中で、このような共有点 v_i に至る度に、もし、G'_i に辺があれば、G'_i のオイラー閉路に寄り道して、C の続きを辿るようにすると、この経路は G のオイラー閉路となります。　(証明終り)

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 14 回・終わり