集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 13 回

2023 年 1 月 6 日

今回の内容

13.1 グラフ . . . . 13 – 1
13.2 木 . . . . 13 – 4

13.1 グラフ

二つの集合 V、E と、E から $\mathcal{P}(V)$ への写像 φ の組 $\langle V,\ E,\ \varphi\rangle$ で、次の条件を満たすものを「**グラフ** (graph)」、あるいは、「**無向グラフ** (undirected graph)」と呼びます[1]。

$$\forall e \in E.\ |\,\varphi(e)| \in \{\,1,\ 2\,\}$$

グラフ $G = \langle V,\ E,\ \varphi\rangle$ に対して、V の要素を G の「**頂点** (vertex)」、あるいは「**節点** (node)」と呼び、E の要素を G の「**辺** (edge)」、あるいは「**枝**」と呼びます。写像 φ は E の各要素に対して、1 個、あるいは、2 個の頂点からなる集合を対応付けますが、$\varphi(e)$ に属する頂点を辺 e の「**端点**」と呼びます。

グラフの図による表現　グラフ $G = \langle V,\ E,\ \varphi\rangle$ の E や V が有限集合であれば、頂点を $\bullet$ で書き表し、各辺 e に対して、その端点を線で結ぶと、G は、例えば、図 1 のように書き表すことができます。端点が 1 つ、つまり、$|\varphi(e)| = 1$ である辺 e は、その端点から出て元の端点へ戻ってくる環状の線となりますが、このような辺 e は「**ループ** (loop)」、あるいは、「**自己ループ** (self-loop)」と呼ばれます。また、端点の集合が他の辺と一致している辺、つまり、$\exists e' \in E.\ e \neq e' \land \varphi(e) = \varphi(e')$ であるような辺 e は「**多重辺**」と呼ばれます。

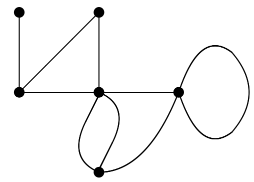

図 1: (無向) グラフの例

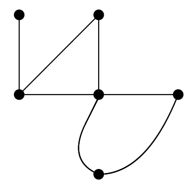

図 2: 単純グラフの例

単純グラフ　グラフ $G = \langle V,\ E,\ \varphi\rangle$ がループも多重辺も持たないとき、G は「**単純グラフ**」であると言います。例えば、図 2 は単純グラフですが、図 1 は単純グラフではありません。G が単純グラフであることと、次の条件は同値です。

$$\varphi \text{ が単射} \land \forall e \in E.\ |\,\varphi(e)| = 2$$

メモ

[1] E が空でないようなもののみを「グラフ」と言う場合もあります。いずれにせよ、高校で学習した、いわゆる関数の「グラフ」とは全く異なる概念ですので注意してください。

注意　単純グラフのみを「グラフ」と呼ぶ場合があります。このような場合、単純グラフでないものを含めた一般のグラフは「多重グラフ (multigraph)」と呼ばれます[2]。

位数と有限グラフ　グラフ $G = \langle V,\, E,\, \varphi \rangle$ に対して、$|V|$ を G の「**位数** (order)」と呼びます。また、V も E も有限集合であるような G を「**有限グラフ**」と呼びます。例えば、図 1 も図 2 も位数が 6 の有限グラフです。

注意　グラフに関する議論では、暗黙の内に、位数が 1 以上の有限グラフであることを前提とする場合が多いので注意が必要です。

メモ

連結グラフ　任意の頂点から任意の頂点に辺を辿って行けるようなグラフは「**連結**」であると言います。

閉路　グラフのある頂点から相異なる辺を 1 つ以上辿って元の頂点に戻ってくるような経路を「**閉路**」と呼びます。また、すべての辺を通るような閉路を「オイラー閉路[3]」、すべての頂点を一度だけ通るような閉路を「ハミルトン閉路」と呼びます。

ケーニヒスベルクの橋　18 世紀の初頭、バルト海に面したケーニヒスベルク (Königsberg[4]) の街を流れる川には中州があり、図 3 のような 7 つの橋が掛かっていました。この頃、市中で、「いずれかの地点から、7 つの橋をそれぞれ 1 度だけ渡って元の地点戻って来られるか?」という問いが出されました。この問いは、図 4 のグラフにオイラー閉路があるか、という問題に置き換えることができます。

1736 年、オイラーは、これが不可能であることを示しました。グラフの頂点 v に対して、v に繋がれている辺の数[5]を v の「**次数** (degree)」と呼びます。一般に、1 つ以上の辺を持つ連結な有限グラフがオイラー閉路を持つための必要十分条件は、そのグラフのすべての頂点の次数が偶数となっていることです。この議論がグラフに関する数学の始まりと言われています。

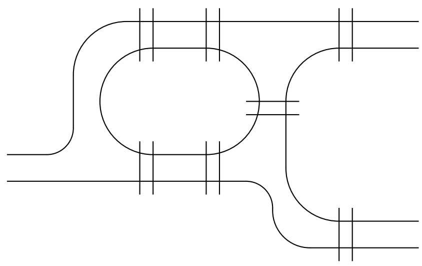

図 3: ケーニヒスベルクの橋

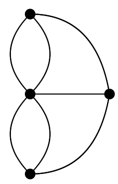

図 4: ケーニヒスベルクの橋のグラフ

[2]「多重グラフ」と言った場合でも、多重辺は許しても、ループを許さないことがあるので注意が必要です。

[3]「オイラー」は、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で知られる数学者の Leonhard Euler のことです。

[4]現在のカリーニングラード (ロシア連邦)

[5]ただし、v から出て v に戻ってくるようなループは 2 と数えます

最短経路とグラフ　グラフは、その図による表現からも分かるように、道路網、通信網、電気回路など、いくつかの対象を相互に接続してできるネットワークについて議論をする際に有用な概念となります。「ケーニヒスベルクの橋」もその１例でしたが、例えば、ある道路網があって、ある地点からある地点へ (道路網を使って) 移動する際の最短経路を見つけるような問題もグラフを使って考えることができます。この場合、道路網中の各地点をグラフの頂点として表し、二地点間を結ぶ一本の道路をグラフの１つの辺として表すことになります。こうすると、道路網上の各地点が道路によってどのように繋がっているかを一つのグラフ $G = \langle V,\, E,\, \varphi\rangle$ で表現することができますが、各道路 (辺) の長さは表現できていませんので、これとは別に、E の各要素に対して非負の実数 (道程) を対応させるような写像 (関数) として、これを表現することになります。

同型なグラフ　二つのグラフ $G = \langle V,\, E,\, \varphi\rangle$ と $G' = \langle V',\, E',\, \varphi'\rangle$ が次の条件を満たすとき、G と G' は「**同型** (isomorphic)」であると言います。

全単射 $f : V \to V'$ と全単射 $g : E \to E'$ が存在して、$\forall e \in E.\ f(\varphi(e)) = \varphi'(g(e))$

上の条件を満たす全単射 f と g に関しては、$\forall e' \in E'.\ f^{-1}(\varphi'(e')) = \varphi(g^{-1}(e'))$ も同様に成り立ちます。同型な二つのグラフは、本質的には同じグラフであると考えることができます。

メモ

有向グラフ　二つの集合 V、E と、E から $V \times V$ への写像 φ の組 $\langle V,\, E,\, \varphi\rangle$ を「**有向グラフ**」と呼びます。有向グラフは、すべての辺に向きがあるグラフです。有向グラフ $G = \langle V,\, E,\, \varphi\rangle$ の E や V が有限集合であれば、頂点を $\bullet$ で書き表した上で、$\varphi(e) = \langle v_1,\, v_2\rangle$ であるような頂点 v_1 と v_2 を、v_1 から v_2 へ向かう矢印で結んで書き表すと、有向グラフは、例えば、図５のように書き表すことができます。

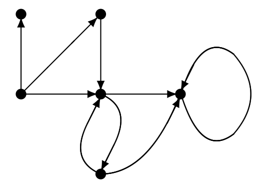

図 5: 有向グラフの例

状態遷移と有向グラフ　ある対象のとりうる状態が、どのような事象を契機としてどのように変化するかを有向グラフ $\langle V,\, E,\, \varphi\rangle$ で表現することができます。対象のとりうる状態の集合を V とし、状態 v の下で、その状態を変化させる契機となる事象 t を考え、そのような $\langle v,\, t\rangle$ を集めてできる集合を E とします。φ については、状態 v で事象 t が起った際に、状態が v' に変化するとき、$\varphi(\langle v,\, t\rangle) = \langle v,\, v'\rangle$ とします。

二項関係が作る有向グラフ　集合 V と、この V 上の二項関係 R の組 $\langle V,\, R\rangle$ は、

$$E = \{\, \langle v_1,\, v_2\rangle \in V \times V \mid v_1 \mathrel{R} v_2 \,\}$$
$$\varphi(\langle v_1,\, v_2\rangle) = \langle v_1,\, v_2\rangle$$

のように E と φ を定義すると、多重辺を持たない有向グラフ $\langle V,\, E,\, \varphi\rangle$ とみなすことができます。

メモ

13.2　木

連結で閉路のない位数が 1 以上のグラフを「**木** (tree)」と呼びます。木を図で表すと、例えば、図 6 のようなものとなります。グラフ $T = \langle V,\, E,\, \varphi\rangle$ が木であれば、T には閉路がありませんので、単純グラフとなります。また、T が有限グラフであれば、$|V| = |E| + 1$ が成り立ちます。

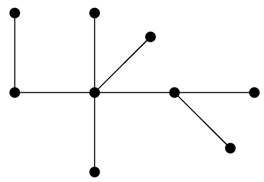

図 6: 木の例

根付き木と葉　木を考える時、その頂点の内の一つ選んで「**根** (root)」と呼び、その頂点を特別扱いすることがよくあります。このように、根が定められた木のことを「根付き木」と呼びます。r を根とする根付き木の 2 つの頂点 v_1 と v_2 の間に辺があり、r から辺を辿って v_2 に至るには v_1 を経由しないといけないとき、v_1 を v_2 の「**親**」と呼び、v_2 を v_1 の「**子**」と呼びます。また、根付き木の頂点で、子のないものを「**葉** (leaf)」と呼びます。

有限根付き木を図示する際には、根を最上部に描き、親よりも子が下側にくるように描くことがよくあります。例えば、図 6 の木で、左上端に位置する頂点を根とすると、この根付き木を図 7 のように描きます。

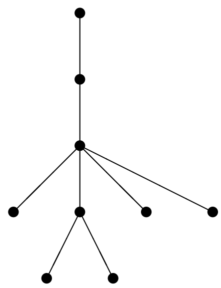

図 7: 根付き木の図示

メモ

順序付き木　根付き木の各頂点について、その子となっている頂点の集合に全順序が定義されているとき、その根付き木を「**順序付き木** (ordered tree)」と呼びます。有限順序付き木を図示する場合は、通常、各頂点の子を、この全順序に従って、例えば、左から右に並べるように描きます。

階層構造と根付き木　根付き木は、階層を持った構造を表現するのによく使われます。例えば、計算機システムのファイルがディレクトリ (フォルダ) 階層のいずれかの位置に置かれるとき、ディレクトリやファイルを頂点とする根付き木と考えることができます。あるディレクトリ d に置かれたファイル f や (サブ) ディレクトリ s は、ディレクトリ d の子であり、d は f や s の親にあたります。ファイルの置かれていないディレクトリや通常のファイルは、この根付き木の葉の一つとなります。

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 13 回・終わり