集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 12 回

2022 年 12 月 23 日

今回の内容

12.1 ブール代数

第 4 回では、命題の世界と集合の世界に関する次の表のような対応を考えると、これらの世界で共通に成立する性質があることを紹介しました。

命題と論理演算		集合と集合演算	
$\wedge$	(論理積)	$\cap$	(共通集合)
$\vee$	(論理和)	$\cup$	(和集合)
$\perp$	(偽)	$\{\}$	(空集合)
$\top$	(真)	U	(全体集合)
$\neg$	(否定)	$\overline{}$	(補集合)

ただし、U は全体集合を表します。

命題の世界と集合の世界の共通の性質

交換律	$A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$	$A \vee B \Longleftrightarrow B \vee A$
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
結合律	$A \wedge (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \vee C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
分配律	$A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
吸収律	$A \wedge (A \vee B) \Longleftrightarrow A$	$A \vee (A \wedge B) \Longleftrightarrow A$
	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
相補律	$A \wedge \neg A \Longleftrightarrow \perp$	$A \vee \neg A \Longleftrightarrow \top$
	$A \cap \overline{A} = \{\}$	$A \cup \overline{A} = U$
べき等律	$A \wedge A \Longleftrightarrow A$	$A \vee A \Longleftrightarrow A$
	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
二重否定律	$\neg\neg A \Longleftrightarrow A$	
	$\overline{\overline{A}} = A$	
ド・モルガン律	$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
	$A \wedge \perp \Longleftrightarrow \perp$	$A \vee \top \Longleftrightarrow \top$
	$A \cap \{\} = \{\}$	$A \cup U = U$
	$A \wedge \top \Longleftrightarrow A$	$A \vee \perp \Longleftrightarrow A$
	$A \cap U = A$	$A \cup \{\} = A$
	$\neg \top \Longleftrightarrow \perp$	$\neg \perp \Longleftrightarrow \top$
	$\overline{U} \Longleftrightarrow \{\}$	$\overline{\{\}} = U$

また、論理演算では、$\wedge$ と $\vee$、$\top$ と $\perp$ を、集合演算では、$\cap$ と $\cup$、U と $\{\}$ を、それぞれ相互に置き換えても同じ性質が成立するという、「双対性」と呼ばれる性質があることを紹介しました。

メモ

ブール代数の公理　一般に、空でないある集合 S があって、S の要素に対する演算がいくつか定められているとき、集合 S とそれらの演算の組を**代数系**と呼びます。また、空でないある集合 S の要素の中に 0 および 1 と呼ばれる要素が含まれていて、S の要素に関する単項演算 $^{-}$ と、二項演算 $\cdot$ および $+$ が定義されており、以下に示す (交換律) から (相補律) までの法則が成り立っているとき、この代数系は「**ブール代数** (Boolean algebra)」であると言います。

ブール代数の公理

(交換律)	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
(結合律)	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
(分配律)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
(吸収律)	$x \cdot (x + y) = x$	$x + (x \cdot y) = x$
(相補律)	$x \cdot \bar{x} = 0$	$x + \bar{x} = 1$

この (交換律) から (相補律) までの性質を「**ブール代数の公理**」と呼び[1]、これらの公理から、ブール代数すべてに共通する性質を導き出すことができます。

注意　上のブール代数の公理の表では、例えば、交換律が $x \cdot y = y \cdot x$ や $x + y = y + x$ と書かれていますが、その意味は、そこに現われている自由変数 x と y を全称量化子で量化した、それぞれ $\forall x.\, \forall y.\, x \cdot y = y \cdot x$ や $\forall x.\, \forall y.\, x + y = y + x$ という論理式となります。代数系などの公理を書き表す場合、このように全称量化子を省略することが多いので注意が必要です。

注意　この科目では、これらの公理を満たしているものをブール代数と呼ぶことにしますが、これに加えて S が 2 つ以上の要素を持つ場合のみブール代数と呼んだり、S がちょうど 2 つの要素を持つ場合のみブール代数と呼ぶこともあります。

メモ

[1] ブール代数の公理の選び方は 1 通りではなく、ここで示したもの以外に等価なものがたくさん考えられます。

真理値の集合 $\{0, 1\}$ に対する 3 つの論理演算 (否定 $\neg$、論理積 $\wedge$、論理和 $\vee$) が作る代数系も、ある集合 U のべき集合の要素 (つまり U の部分集合) に対する 3 つの集合演算 (補集合をとる $^{-}$、共通部分をとる $\cap$、和集合をとる $\cup$) が作る代数系も、ブール代数の公理をすべて満たしていますので、どちらもブール代数となります。

つまり、真理値と部分集合という 2 つの世界には次のような対応関係があり、どちらの世界でも 1 ページで紹介した性質 (法則) が成り立ちます。これらの共通した性質は、ブール代数の公理からすべて導き出すことができます。

ブール代数	S	0	1	$^{-}$	$\cdot$	$+$
真理値	$\{0, 1\}$	0 (偽)	1 (真)	否定	論理積	論理和
部分集合	$\mathcal{P}(U)$	空集合	全体集合	補集合	共通部分	和集合

真理値の世界と部分集合の世界との違いは要素の数です。真理値の世界には 1 (真) と 0 (偽) の 2 つの値だけが存在しますが、部分集合の世界にどれだけの値が存在するかは、全体集合 U の大きさによってさまざまです。全体集合 U が空集合なら、そのべき集合の要素は空集合のみとなり、ただ 1 つの値からなるブール代数となり、0 も 1 もこの空集合を表すことになります[2]。U の要素がただ 1 つの場合は、べき集合は空集合と U 自体の 2 つの要素からなりますので、ちょうど 2 つの値から構成されるブール代数となり、真理値が作るブール代数と実質的に同じものになります。

メモ

12.2 ブール代数の性質の導出

以下の導出では、特に断りなく交換律と結合律を用いています。双対となる法則の片方の導出しか行っていませんが、もう一方も同様に導けることに注意してください。

べき等律 $x \cdot x = x$ の導出 ($x + x = x$ も同様)

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x \cdot (x + (x \cdot y)) && (\because 吸収律より\ \ x = x + (x \cdot y)\ ) \\ &= x && (\because 吸収律\ \ x \cdot (x + y) = x\ の\ y\ に\ x \cdot y\ を代入) \end{aligned}$$

$\mathsf{0} \cdot x = \mathsf{0}$ の導出 ($\mathsf{1} + x = \mathsf{1}$ も同様)

$$\begin{aligned} \mathsf{0} \cdot x &= \bar{x} \cdot x \cdot x && (\because 相補律より\ \ \mathsf{0} = \bar{x} \cdot x) \\ &= \bar{x} \cdot x && (\because べき等律\ ) \\ &= \mathsf{0} && (\because 相補律\ ) \end{aligned}$$

[2] 1 つの値だけからなる代数系は、1 ページに挙げた性質を必ず満たしますから、このようなブール代数を考えることにあまり意味はありません。

$1 \cdot x = x$ の導出 （$0 + x = x$ も同様）

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (\bar{x} + x) \cdot x && (\because \text{相補律より } 1 = \bar{x} + x) \\ &= x && (\because \text{吸収律}) \end{aligned}$$

$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$ の導出 （$x + (\bar{x} \cdot y) = x + y$ も同様）

$$\begin{aligned} x \cdot (\bar{x} + y) &= (x \cdot \bar{x}) + (x \cdot y) && (\because \text{分配律}) \\ &= 0 + (x \cdot y) && (\because \text{相補律}) \\ &= x \cdot y && (\because \text{法則 } 0 + x = x \text{ の } x \text{ に } x \cdot y \text{ を代入}) \end{aligned}$$

補題 $x \cdot y = 0$ かつ $x + y = 1$ ならば $\bar{x} = y$

（証明） $x \cdot y = 0$ と $x + y = 1$ が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x} \cdot 1 && (\because \text{法則 } 1 \cdot x = x \text{ の } x \text{ に } \bar{x} \text{ を代入}) \\ &= \bar{x} \cdot (x + y) && (\because \text{仮定より } 1 = x + y) \\ &= (\bar{x} \cdot x) + (\bar{x} \cdot y) && (\because \text{分配律}) \\ &= 0 + (\bar{x} \cdot y) && (\because \text{相補律より } \bar{x} \cdot x = 0) \\ &= (x \cdot y) + (\bar{x} \cdot y) && (\because \text{仮定より } 0 = x \cdot y) \\ &= (x + \bar{x}) \cdot y && (\because \text{分配律}) \\ &= 1 \cdot y && (\because \text{相補律}) \\ &= y && (\because \text{法則 } 1 \cdot x = x \text{ の } x \text{ に } y \text{ を代入}) \end{aligned}$$

[証明終り]

二重否定律 $\bar{\bar{x}} = x$ の導出

相補律より、$\bar{x} \cdot x = 0$ と $\bar{x} + x = 1$ が成り立つから、補題より、$\bar{\bar{x}} = x$ が導ける。

ド・モルガン律 $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$ の導出 （$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ も同様）

補題が成り立つので、$(x \cdot y) + (\bar{x} + \bar{y}) = 1$ と $(x \cdot y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = 0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} (x \cdot y) + (\bar{x} + \bar{y}) &= (x + \bar{x} + \bar{y}) \cdot (y + \bar{x} + \bar{y}) && (\because \text{分配律}) \\ &= (1 + \bar{y}) \cdot (1 + \bar{x}) && (\because \text{相補律}) \\ &= 1 \cdot 1 && (\because \text{法則 } 1 + x = 1) \\ &= 1 && (\because \text{べき等律}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) &= (x \cdot y \cdot \bar{x}) + (x \cdot y \cdot \bar{y}) && (\because \text{分配律}) \\ &= (0 \cdot y) + (x \cdot 0) && (\because \text{相補律}) \\ &= 0 + 0 && (\because \text{法則 } 0 \cdot x = 0) \\ &= 0 && (\because \text{べき等律}) \end{aligned}$$

$\bar{1} = 0$ の導出 （$\bar{0} = 1$ も同様）

$1 \cdot 0 = 0$ と $1 + 0 = 1$ が成り立つから、補題より、$\bar{1} = 0$ が導ける。

集合と論理 (集合と位相及び演習) ・第 12 回・終わり