

今回の内容

11.1 全射と単射	11-1
11.2 集合の濃度	11-3

11.1 全射と単射

全射 集合 A から集合 B への写像 f の値域が B に等しいとき、写像 f は「全射である」と言います。つまり、

$$\begin{aligned}
 f \text{ が全射} &\iff f(A) = B \\
 &\iff \{y \in B \mid \exists x \in A. y = f(x)\} = B \\
 &\iff \forall y \in B. \exists x \in A. y = f(x)
 \end{aligned}$$

ということになります。ベン (Venn) 図中で集合の要素を \cdot で表わし、写像による要素の対応を矢印で結んで表わすと、図 1(左) のような写像が全射です。図 1(右) の写像は全射ではありません。

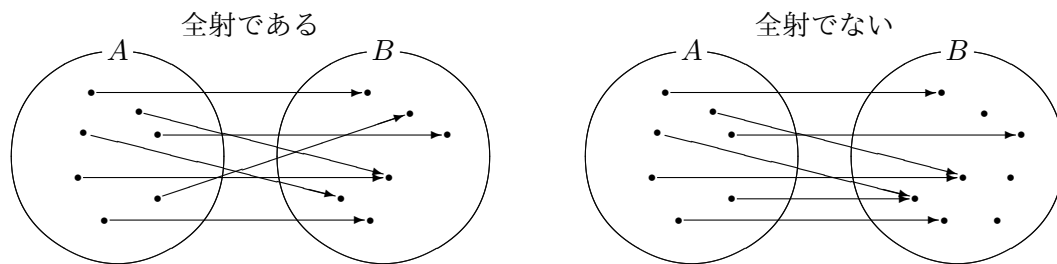


図 1: 全射の写像の例 (左) と全射でない写像の例 (右)

単射 集合 A から集合 B への写像 f が A の異なる要素を B の同じ要素に対応させないとき、写像 f は「単射である」と言います¹。つまり、

$$\begin{aligned}
 f \text{ が単射} &\iff \forall x \in A. \forall y \in A. x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \\
 &\iff \forall x \in A. \forall y \in A. f(x) = f(y) \Rightarrow x = y
 \end{aligned}$$

です。図 2(左) のような写像が単射で、図 2(右) の写像は単射ではありません。

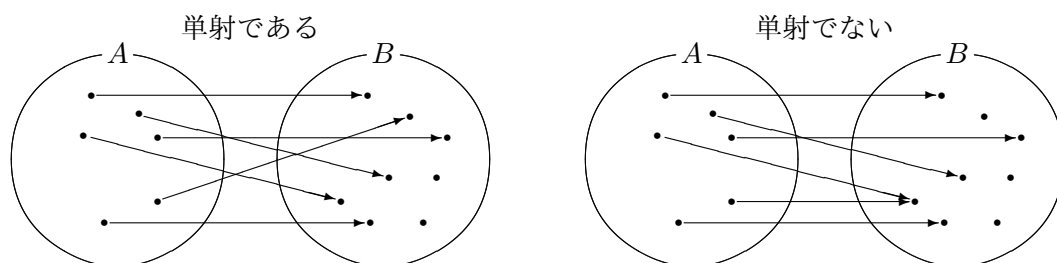


図 2: 単射の写像の例 (左) と単射でない写像の例 (右)

¹「単射」のことを「1 対 1」と言うことがありますが、「1 対 1」という語は後述の「全単射」の意味で用いる場合もありますので注意が必要です。

全単射 写像 f が全射で、かつ単射であるとき、写像 f は「全単射である」と言います。図3は A から B への全単射の例です。

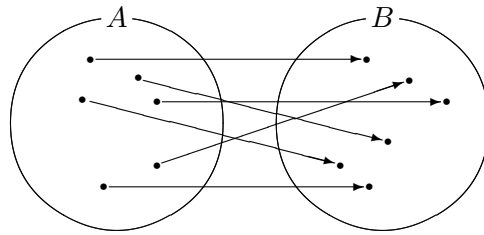


図3: 全単射の写像の例

逆写像 集合 A から集合 B への写像 (関数) f が全単射であるとき、 B の任意の要素 y に対して、 $y = f(x)$ となる A の要素 x がただ一つ存在します。このとき、 B の要素 y に対して、このような A の要素 x を対応させる写像 (関数) を、 f の「逆写像(逆関数)」と呼び、 f^{-1} と書き表します。例えば、図3の写像の逆写像は図4のようなものとなります。

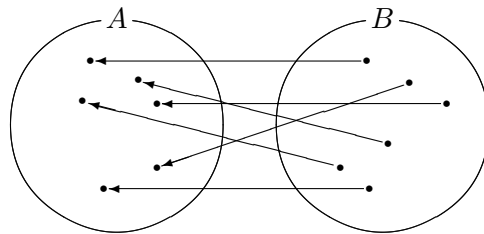


図4: 図3の写像の逆写像

f^{-1} は B から A への全単射となり、 f は f^{-1} の逆写像となります。 f と f^{-1} に関して、次のような命題が成り立ちます。

$$\forall x \in A. f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\forall y \in B. f(f^{-1}(y)) = y$$

注意 全単射写像 f を直積集合 $A \times B$ の部分集合とみなすと、 f^{-1} は、 $B \times A$ の次のような部分集合となります。

$$f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \in B \times A \mid \langle x, y \rangle \in f \}$$

メモ

11.2 集合の濃度

有限集合 A の要素の個数を $|A|$ と書き表すことにします。例えば、 $|\{2, 3, 5, 7\}| = 4$ ですし、 $|\{\}| = 0$ です。集合 A と B がともに有限集合の場合、次の性質が成り立ちます。

集合の大きさ と 全射や単射の関係

$$\begin{aligned} |A| \leq |B| &\iff A \text{ から } B \text{ への単射が存在する} \\ &\iff B \text{ から } A \text{ への全射が存在する} \\ |A| = |B| &\iff A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する} \\ &\iff B \text{ から } A \text{ への全単射が存在する} \end{aligned}$$

つまり、二つの集合 A と B の要素の個数(大きさ)を、 A から B への、あるいは B から A への単射や全射の存在で表現することができます。この考え方を無限集合に拡張して、全射や単射の存在で無限集合の大きさを比較してみると、無限集合にいろいろな大きさの違いがあることが分かります。

濃度 一般の集合 A に対して、 A の大きさの度合いを $|A|$ で書き表し、これを集合 A の「濃度」と呼びます。集合 A が有限集合の場合、 $|A|$ は非負の整数となり、 A の要素の個数です。無限集合の要素の個数は非負整数で表すことができませんので、「要素の個数を表す非負の整数」を拡張して「基数」と呼ばれる概念を導入し、様々な無限集合の大きさを表現できるようにします。一般の集合 A の濃度 $|A|$ は、この基数の一つとなります。

ここでは、その詳細には触れませんが、基数全体はその一部にすべての非負の整数を含み、さらに、無限集合の様々な大きさに対応した要素を含みます。また、基数全体には全順序関係 \leq が定義されていて、有限集合の要素の個数の場合と同様に、一般の集合 A と B に対して、上述の「集合の大きさ と 全射や単射の関係」が成立します。基数が具体的にどのようなものであるかは知らなくても、この関係に基づいて二つの集合の濃度の大小を比較することができます。

メモ

ベルンシュタインの定理 基数全体が全順序となっていることを紹介しましたが、これは次の命題が成り立つことを意味しています。この定理は「ベルンシュタインの定理²」と呼ばれます。

集合 A から集合 B への単射が存在し、かつ、集合 B から集合 A への単射が存在すれば、集合 A から集合 B への全単射が存在する。

この定理の証明については「付録: ベルンシュタインの定理」を参照してください。

²カントール–ベルンシュタインの定理、あるいは、シュレーダー–ベルンシュタインの定理などとも呼ばれます。

可算集合と非可算集合 自然数全体 \mathbb{N} と同じ濃度を持つ集合、すなわち \mathbb{N} からその集合への全単射が存在するような集合を「**可算(無限)集合**」と呼びます。一方、そうでない無限集合を「**非可算(無限)集合**」と呼びます。集合 A が非可算集合であるならば、 $B \subset A \wedge A \not\approx B$ であるような可算集合 B が必ず存在します。

部分集合の濃度 集合 A が集合 B の部分集合ならば、 $|A| \leq |B|$ となります。つまり、

$$A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$$

です。集合 A と B について $A \subset B \wedge A \not\approx B$ が成り立つとき、つまり、 A は B の真部分集合であるときも、もちろん $|A| \leq |B|$ となりますが、 $|A| \not\approx |B|$ となるとは限りません。 A が無限集合の場合は、 A が B の真部分集合であっても、 $|A| = |B|$ となることがあります。例えば、自然数全体 \mathbb{N} と整数全体 \mathbb{Z} の間には、次のような全単射が存在しますので、 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ となります。

\mathbb{N}	1	2	3	4	5	6	7	8	...
\mathbb{Z}	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

同様に、偶数全体 $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ や奇数全体 $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ の濃度も \mathbb{Z} や \mathbb{N} の濃度と等しくなります。つまり、これらはすべて可算集合です。

メモ

\mathbb{N}^2 や \mathbb{Z}^2 の濃度 次のような全単射を考えると、 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度も \mathbb{N} と等しいことが分かります。

\mathbb{N}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
\mathbb{N}^2	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 3, 3 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 4, 1 \rangle$...

同様に、 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ も可算集合となります。一般に、集合 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ がどれも可算集合であれば、それらの直積 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ も可算集合となります。

\mathbb{Q} の濃度 有理数は、分母が自然数で分子が整数であるような分数で表現できますので、有理数全体 \mathbb{Q} の濃度は $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ の濃度以下であることが分かります。 $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ は可算集合ですから、 \mathbb{Q} も可算集合であることが分かります。

メモ

べき集合の濃度 一方、集合 A のべき集合 $\mathcal{P}(A)$ の濃度は、必ず A の濃度より真に大きくなり、等しくなることはありません。つまり、一般に、次が成り立ちます。

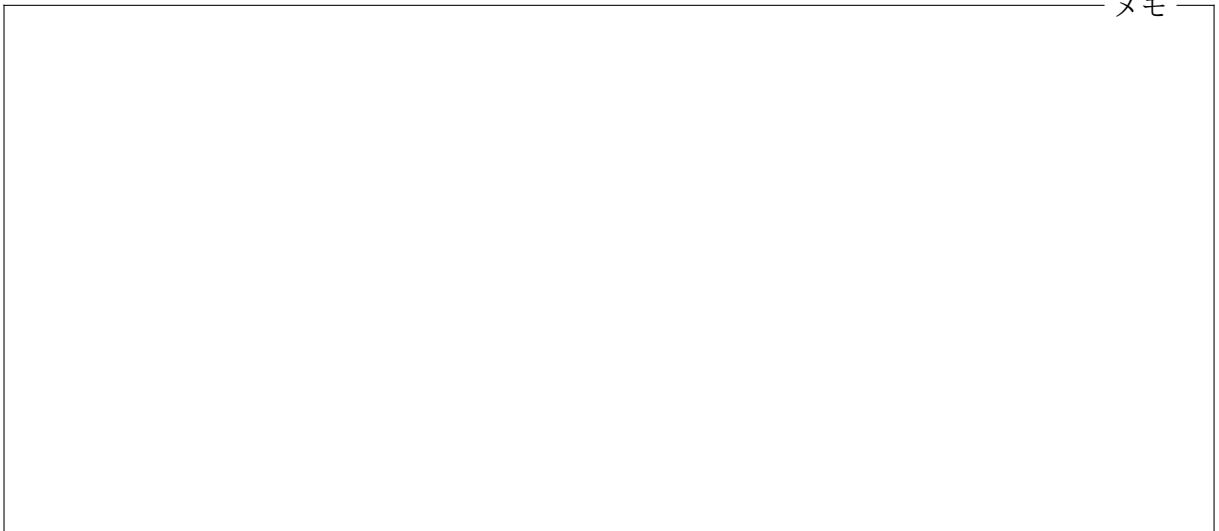
$$|A| \leq |\mathcal{P}(A)| \wedge |A| \neq |\mathcal{P}(A)|$$

これは、以下のように示すことができます。

まず、 A から $\mathcal{P}(A)$ へ写像 f を $f(x) = \{x\}$ と定義すると、 f は明らかに単射となりますので、 $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ です。一方、 A から $\mathcal{P}(A)$ への全射が存在しないことを次のように示すことができます。

- (1) f を A から $\mathcal{P}(A)$ への写像とする。
- (2) A の部分集合 X を、 $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ と定義する。
- (3) $y \in A$ と仮定する。
- (4) さらに、 $X = f(y)$ と仮定する。
- (5) ここで、 $y \in X$ と仮定する。
- (6) すると (2) より、 $y \notin f(y)$ 。
- (7) つまり、(4) より、 $y \notin X$ 。
- (8) これは、(5) に矛盾する。
- (9) ゆえに、(5) の仮定は否定され、 $y \notin X$ 。
- (10) よって、(2) より、 $y \in f(y)$ 。
- (11) つまり、(4) より、 $y \in X$ 。
- (12) これは (9) と矛盾する。
- (13) よって、(4) の仮定は否定され、 $X \neq f(y)$ 。
- (14) (3) の仮定から (13) が導かれたので、 $y \in A \Rightarrow X \neq f(y)$ 。
- (15) よって、 $\forall y \in A. X \neq f(y)$ 。 [全称量子子の導入]
- (16) つまり、 f は全射ではない。
- (17) (1) から (16) が導かれたので、 A から $\mathcal{P}(A)$ への任意の写像は全射ではない。
- (18) つまり、 A から $\mathcal{P}(A)$ への全射は存在しない。 [ド・モルガン律]

メモ



\mathbb{R} の濃度 実数全体 \mathbb{R} は非可算集合です。つまり、次が成り立ちます。

$$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}| \wedge |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$$

\mathbb{R} の部分集合 $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ を考えると、 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+|x|}$$

を対応させる写像は \mathbb{R} から I への全単射となりますので、 $|I| = |\mathbb{R}|$ です。よって、この I が非可算集合であることを示すことができれば、 \mathbb{R} も非可算集合であることが示せます。

I の要素はすべて、0.20319962013581... のような無限小数で書き表すことができます。ただし、0.013 のような有限小数で表すことのできる実数についても、0.0129999999... のように同じ実数を意味する無限小数で表すことにします。 I の要素 x をこのように無限小数で表したときの小数第 n 位を x_n と書き表すことにして、各 x_n に対して、 $\overline{x_n}$ を

$$\overline{x_n} = \begin{cases} 5 & (x_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ のとき}) \\ 4 & (x_n \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義します³。

ここで、 f を \mathbb{N} から I への写像とします。この f から、集合 I の要素 y を次のように作ります。まず、

$$y_n = \overline{f(n)}_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定義した上で、無限小数で書き表すと

$$0.y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 \dots$$

となるような実数を y とします。このように y を定義すると、 $y \in I$ ですが、 y を無限小数で表したときの小数第 n 位は、必ず $f(n)$ の小数第 n 位とは異なることとなります。これは、すべての自然数 n に対して、 $y \neq f(n)$ となることを意味しますので、 f は全射ではないこととなります。つまり、 \mathbb{N} から I への全射は存在しません。よって、 I は非可算集合となります。

メモ

対角線論法 以上の論証では、 $f(n)$ を無限小数で書き表したものを n 行目として、次のような表を作り、表の 1 行目の小数第 1 位、2 行目の小数第 2 位、3 行目の小数第 3 位、... のように表の対角線上の数字を異なる数字に書き換えて得られる無限小数を y として、 f の値域に含まれない要素を構成しています。このような論証の方法は「対角線論法」と呼ばれています。

³この定義でなくても、 $\overline{x_n} \neq x_n$ で、かつ、 $\overline{x_n} = 0$ となる n が無限に続くことのないような定義であれば十分です。例えば、 x_n が偶数のとき $\overline{x_n} = 1$ 、 x_n が奇数のとき $\overline{x_n} = 2$ 、のような定義でも構いません。

n	$f(n)$ の無限小数表現	y_n
1	0. 7 3 0 1 8 0 9 9 4 1 8 2 3 8 ...	4
2	0. 4 7 4 1 0 9 6 7 7 3 4 1 2 7 ...	4
3	0. 0 0 3 8 8 3 4 9 2 0 1 5 4 3 ...	5
4	0. 1 0 0 9 3 5 2 5 5 3 9 8 3 0 ...	4
5	0. 1 5 8 1 6 0 2 0 2 3 6 8 1 8 ...	4
6	0. 9 9 4 5 1 0 0 3 7 1 0 0 2 7 ...	5
\vdots	\vdots	\vdots

$\Rightarrow y = 0.445445$

べき集合 $\mathcal{P}(A)$ の濃度が元の集合 A の濃度より真に大きいことを証明した際には、 A から $\mathcal{P}(A)$ への写像 f から、 f の値域に含まれていない $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ という要素を構成して、 f が全射でないことを示しましたが、このときの論法も「対角線論法」と呼ばれます。



\mathbb{R}^2 の濃度 \mathbb{R}^2 の濃度も \mathbb{R} と同じになります。 $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ とし、 I^2 の要素 $\langle x, y \rangle$ に対して、 x と y を無限小数で書き表したとき的小数部を

$$x = 0.3|8|02|1|004|7|3|\dots$$

$$y = 0.09|5|6|3|9|8|001|\dots$$

のように 0 以外の位の直後で分割して⁴

$$z = 0.3|09|8|5|02|6|1|3|004|9|7|8|3|001|\dots$$

のように交互に並べてできる無限小数を z とすると、 $\langle x, y \rangle$ を z に対応させる写像 f は I^2 から I への全単射となります。よって、 $|I^2| = |I| = |\mathbb{R}|$ となります。

一方、 \mathbb{R} が非可算集合であることを示した時と同様に、

$$f : \langle x, y \rangle \mapsto \left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+|x|}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{1+|y|} \right\rangle$$

という写像 f を考えると、 f は \mathbb{R}^2 から I^2 への全単射となりますので、 $|I^2| = |\mathbb{R}^2|$ です。よって、 $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ であることが分かります。

集合と論理 (集合と位相及び演習) ・ 第 11 回 ・ 終わり

⁴位ごとに分割してしまうと、 $z = 0.17010208080703\dots$ のように、1 つおきに 0 が現われるような実数に対応する $\langle x, y \rangle$ がなくなってしまうので、全射とはなりません。 x や y は無限小数で表現することになっていますので、小数部の 0 は無限には続かないことに注意してください。ただし、位ごとに分割して交互に並べても単射にはなりませんので、 $|I^2| \leq |I|$ を示すことはできません。

付録: ベルンシュタインの定理の証明

集合 A から集合 B への単射 f と集合 B から集合 A への単射 g が存在すると仮定します。この仮定から、 A から B への全単射 h を構成します。

まず、集合 C_0 と集合 D_0 を次のように定義します。

$$C_0 = A - g(B) = \{x \in A \mid \forall y \in B. x \neq g(y)\}$$

$$D_0 = B - f(A) = \{y \in B \mid \forall x \in A. y \neq f(x)\}$$

さらに、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、集合 C_n と集合 D_n を次のように定義します。

$$C_n = g(f(C_{n-1}))$$

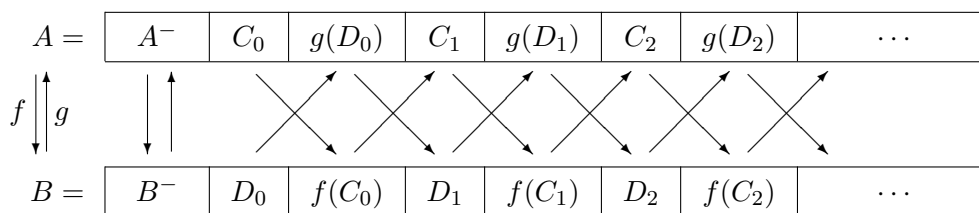
$$D_n = f(g(D_{n-1}))$$

次に、集合 A^- と集合 B^- を

$$A^- = A - (C_0 \cup g(D_0) \cup C_1 \cup g(D_1) \cup C_2 \cup g(D_2) \cup \dots)$$

$$B^- = B - (D_0 \cup f(C_0) \cup D_1 \cup f(C_1) \cup D_2 \cup f(C_2) \cup \dots)$$

と定義すると、写像 f と g は単射ですから、集合 A と集合 B は、次の図のようにそれぞれ分割できて、各部分は写像 f や g によって図中の矢印のように写されます⁵。



ここで、 f の定義域を A^- に制限したものを f^- とし、各 i について、 g の定義域を D_i に制限したものを g_i とすると、 f^- は A^- から B^- への全単射となり、 g_i は D_i から $g(D_i)$ への全単射となります。そこで、写像 h を次のように定義すれば、 A から B への全単射 h を構成することができます。

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in (A^- \cup C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots) \text{ のとき}) \\ g_0^{-1}(x) & (x \in g(D_0) \text{ のとき}) \\ g_1^{-1}(x) & (x \in g(D_1) \text{ のとき}) \\ g_2^{-1}(x) & (x \in g(D_2) \text{ のとき}) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

[証明終り]

⁵これは数学的帰納法で示すことができます。まず、 $C_0 = A - g(B)$ なので、 $C_0 \cap g(D_0) = \{\}$ です。同様に、 $D_0 \cap f(C_0) = \{\}$ です。もし、 $C_0, g(D_0), \dots, C_k, g(D_k)$ が互いに共通部分を持たないのなら、 f は単射なので、 f によるこれらの像、 $f(C_0), D_1, \dots, f(C_k), D_{k+1}$ も共通部分を持ちません。また、 D_0 は f の像とは共通部分を持たないので、 $D_0, f(C_0), D_1, \dots, f(C_k), D_{k+1}$ が共通部分を持たないことがわかります。同様に、 $D_0, f(C_0), \dots, D_k, f(C_k)$ が共通部分を持たないのなら、 g は単射なので、 $C_0, g(D_0), C_1, \dots, g(D_k), C_{k+1}$ も共通部分を持ちません。よって、数学的帰納法により、 $C_0, g(D_0), C_1, \dots$ や $D_0, f(C_0), D_1, \dots$ はそれぞれ共通部分を持たないことがわかります。さらに、 A^- や B^- の定義と f や g が単射であることより、これらは、それぞれ A^- や B^- とも共通部分を持たず、 A や B は、それぞれ図のように分割され、 $f(A^-) = B^-$ かつ $g(B^-) = A^-$ となることがわかります。