集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 10 回

2022 年 12 月 9 日

今回の内容

10.1 全称記号や存在記号が関わる論証

前回紹介した全称量化子や存在量化子に関する推論の規則を使うと、様々な命題を証明することができます。今回はそのような例をいくつか紹介します。

ド・モルガン律の証明例 第 5 回では、全称量化子や存在量化子に関して次の 2 つの性質が成り立つことを紹介しました。

$$\neg\,\forall x\ A(x) \iff \exists x\ \neg\,A(x)$$
$$\neg\,\exists x\ A(x) \iff \forall x\ \neg\,A(x)$$

これらの法則は「ド・モルガン律」と呼ばれ、論証の中で自由に利用することができますが、前回に紹介した全称量化子の導入と除去、存在量化子の導入と除去という 4 つの推論の規則を使うと、これらの性質を証明することもできます。

$\neg\,\forall x\ A(x)\ \Rightarrow\ \exists x\,\neg\,A(x)$ の証明例

(1) $\neg\,\forall x\ A(x)$ を仮定する。
(2) さらに、$\neg(\exists x\ \neg\,A(x))$ を仮定する。
(3) 次に、$\neg\,A(y)$ を仮定する。
(4) すると、$\exists x\ \neg\,A(x)$ である。[存在量化子の導入]
(5) これは (2) と矛盾する。
(6) よって、(3) の仮定は否定され、背理法により $A(y)$ である。
(7) ゆえに、$\forall y\ A(y)$ である。[全称量化子の導入]
(8) これは (1) と矛盾する。
(9) よって、(2) の仮定は否定され、背理法により $\exists x\ \neg\,A(x)$ である。
(10) (1) の仮定から (9) が導かれたので、$(\neg\,\forall x\ A(x)) \Rightarrow (\exists x\ \neg\,A(x))$ である。

(3) のステップでは、y に関して $\neg\,A(y)$ という仮定を置いていますが、この仮定は (6) で背理法を使った際に消えてしまっています。このため、(7) の「全称量化子の導入」では、y に関する仮定はないことに注意してください。また、この証明では (3) 〜 (8) で、y という変数を使っていますが、次のように x を使っても構いません。

(3) 次に、$\neg\,A(x)$ を仮定する。
(4) すると、$\exists x\ \neg\,A(x)$ である。[存在量化子の導入]
(5) これは (2) と矛盾する。
(6) よって、(3) の仮定は否定され、背理法により $A(x)$ である。
(7) ゆえに、$\forall x\ A(x)$ である。[全称量化子の導入]

$\exists x \neg A(x) \ \Rightarrow\ \neg\forall x\, A(x)$ の証明例

(1) $\exists x\ \neg A(x)$ を仮定する。

(2) 　次に、$\forall x\, A(x)$ を仮定する。

(3) 　　さらに、$\neg A(y)$ を仮定する。

(4) 　　　(2) より、$A(y)$ である。[全称量化子の除去]

(5) 　　　これは (3) と矛盾する。

(6) 　　(3) の仮定から $\perp$ が導けたので、(1) より、$\perp$ となる。[存在量化子の除去]

(7) 　ゆえに、(2) の仮定は否定され、$\neg\forall x\, A(x)$ である。

(8) (1) の仮定から (7) が導かれたので、$(\exists x\ \neg A(x)) \Rightarrow (\neg\forall x\, A(x))$ である。

$\neg\exists x\, A(x) \ \Rightarrow\ \forall x\ \neg A(x)$ の証明例

(1) $\neg\exists x\, A(x)$ を仮定する。

(2) 　次に、$A(x)$ を仮定する。

(3) 　　(2) より、$\exists x\, A(x)$ である。[存在量化子の導入]

(4) 　　これは (1) と矛盾する。

(5) 　よって、(2) の仮定は否定され、$\neg A(x)$ である。

(6) 　ゆえに、$\forall x\ \neg A(x)$ である。[全称量化子の導入]

(7) (1) の仮定から (6) が導かれたので、$(\neg\exists x\, A(x)) \Rightarrow (\forall x\ \neg A(x))$ である。

$\forall x\ \neg A(x) \ \Rightarrow\ \neg\exists x\, A(x)$ の証明例

(1) $\forall x\ \neg A(x)$ を仮定する。

(2) 　次に、$\exists x\, A(x)$ を仮定する。

(3) 　　さらに、$A(y)$ を仮定する。

(4) 　　　(1) より、$\neg A(y)$ である。[全称量化子の除去]

(5) 　　　これは (3) と矛盾する。

(6) 　　(3) の仮定から $\perp$ が導けたので、(2) より、$\perp$ となる。[存在量化子の除去]

(7) 　ゆえに、(2) の仮定は否定され、$\neg\exists x\, A(x)$ である。

(8) (1) の仮定から (7) が導かれたので、$(\forall x\ \neg A(x)) \Rightarrow (\neg\exists x\, A(x))$ である。

メモ

10.2　制限付きの全称量化子や存在量化子に関するド・モルガン律

束縛変数の動く範囲を特定の集合 D に制限した $\forall x \in D.\, A(x)$ や $\exists x \in D.\, A(x)$ の形の論理式に関しても、次のようなド・モルガン律が成立します。

$$\neg\,\forall x \in D.\, A(x) \iff \exists x \in D.\, \neg\, A(x)$$
$$\neg\,\exists x \in D.\, A(x) \iff \forall x \in D.\, \neg\, A(x)$$

これらの性質は、論理積と論理和に関するド・モルガン律や通常の量化子に関するド・モルガン律を使って導出できます。

$$\begin{array}{llll}
\neg\,\forall x \in D.\, A(x) & \iff & \neg\,\forall x.\, x \in D \Rightarrow A(x) & [\forall x \in D\ \ldots\ \text{の定義}] \\
& \iff & \exists x.\, \neg(x \in D \Rightarrow A(x)) & [\text{通常の量化子に関するド・モルガン律}] \\
& \iff & \exists x.\, \neg(\neg(x \in D) \vee A(x)) & [\Rightarrow \text{ の } \vee \text{ による書き換え}] \\
& \iff & \exists x.\, (x \in D \wedge \neg\, A(x)) & [\text{論理積と論理和に関するド・モルガン律}] \\
& \iff & \exists x \in D.\, \neg\, A(x) & [\exists x \in D\ \ldots\ \text{の定義}]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\neg\,\exists x \in D.\, A(x) & \iff & \neg\,\exists x.\, x \in D \wedge A(x) & [\exists x \in D\ \ldots\ \text{の定義}] \\
& \iff & \forall x.\, \neg(x \in D \wedge A(x)) & [\text{通常の量化子に関するド・モルガン律}] \\
& \iff & \forall x.\, \neg(x \in D) \vee \neg\, A(x) & [\text{論理積と論理和に関するド・モルガン律}] \\
& \iff & \forall x.\, x \in D \Rightarrow \neg\, A(x)) & [\vee \text{ の } \Rightarrow \text{ による書き換え}] \\
& \iff & \forall x \in D.\, \neg\, A(x) & [\forall x \in D\ \ldots\ \text{の定義}]
\end{array}$$

メモ

10.3　デデキント切断による実数の全順序性の証明

第 8 回の付録では、有理数全体 $\mathbb{Q}$ とその大小関係 $\leqq$ や四則演算 (加減乗除) がすでに定義されているものとして、次の 5 つの条件をすべて満たすような集合 X のことを「実数」と定義しました。

(a)　$X \subset \mathbb{Q}$

(b)　$X \fallingdotseq \{\,\}$

(c)　$X \fallingdotseq \mathbb{Q}$

(d)　$\forall x \in X.\, \exists y \in X.\, x < y$　[最大要素がない]

(e)　$\forall x \in X.\, \forall y \in \mathbb{Q}.\, y \leqq x \Rightarrow y \in X$　[下方に閉じている]

また、このように定義された「実数」の大小関係 $\leqq$ を次のように定義しました。

$$X \leqq Y \iff X \subset Y$$

このように定義された実数全体を $\mathbf{R}$ と書き表すことにすると、$\mathbf{R}$ 上の二項関係 $\leqq$ が全順序となることを示すためには、次の 4 つの命題を証明すればよいということになります。

反射律	$\forall X \in \mathbf{R}.\, X \subset X$
推移律	$\forall X \in \mathbf{R}.\, \forall Y \in \mathbf{R}.\, \forall Z \in \mathbf{R}.\, (X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Rightarrow (X \subset Z)$
反対称律	$\forall X \in \mathbf{R}.\, \forall Y \in \mathbf{R}.\, (X \subset Y) \wedge (Y \subset X) \Rightarrow (X = Y)$
全順序律	$\forall X \in \mathbf{R}.\, \forall Y \in \mathbf{R}.\, (X \subset Y) \vee (Y \subset X)$

反射律、推移律、反対称律の 3 つが成立することは、$\subset$ が集合の包含関係であることから容易に示すことができますので、ここでは全順序律が成り立つことを 2 通りのやり方で示してみます。

全順序律が成り立つことの証明例 (その1)　$\mathbf{R}$ の任意の要素 X と Y について、$X \subset Y \vee Y \subset X$ を示せばよいので、$\neg(X \subset Y \vee Y \subset X)$ を仮定して、そこから矛盾を導き、背理法によって、$X \subset Y \vee Y \subset X$ を示します。

(1) $X \in \mathbf{R}$ と仮定する。
(2) 　$Y \in \mathbf{R}$ と仮定する。
(3) 　　また、$\neg(X \subset Y \vee Y \subset X)$ と仮定する。
(4) 　　　すると、ド・モルガン律により、$\neg(X \subset Y) \wedge \neg(Y \subset X)$。
(5) 　　　つまり、$\neg(\forall x \in X.\, x \in Y) \wedge \neg(\forall y \in Y.\, y \in X)$。
(6) 　　　ド・モルガン律により、$(\exists x \in X.\, x \notin Y) \wedge (\exists y \in Y.\, y \notin X)$。
(7) 　　　ここで、$x \in X \wedge x \notin Y$ を仮定する
(8) 　　　　さらに、$y \in Y \wedge y \notin X$ を仮定する。
(9) 　　　　　有理数の大小関係 $\leqq$ は全順序であるから、$x \leqq y \vee y \leqq x$ である。
(10) 　　　　　まず、$x \leqq y$ だとする。
(11) 　　　　　　すると、(8) より $y \in Y$ なので、(2) と実数の定義 (e) より、$x \in Y$。
(12) 　　　　　　これは (7) と矛盾する。
(13) 　　　　　次に $y \leqq x$ だとする。
(14) 　　　　　　すると、(7) より $x \in X$ なので、(1) と実数の定義 (e) より、$y \in X$。
(15) 　　　　　　これは (8) と矛盾する。
(16) 　　　　　(10) からも (13) からも矛盾が導けたので、(9) より矛盾。[両刀論法]
(17) 　　　　(8) から矛盾が導けたので、(6) の $\exists y \in Y.\, y \notin X$ より矛盾。[存在量化子の除去]
(18) 　　　(7) から矛盾が導けたので、(6) の $\exists x \in X.\, x \notin Y$ より矛盾。[存在量化子の除去]
(19) 　　(3) の仮定から矛盾が導けたので、背理法により $X \subset Y \vee Y \subset X$ である。
(20) 　(2) の仮定から (19) が導けたので、$Y \in \mathbf{R} \Rightarrow X \subset Y \vee Y \subset X$。
(21) 　よって、$\forall Y \in \mathbf{R}.\, X \subset Y \vee Y \subset X$。[全称量化子の導入]
(22) (1) の仮定から (21) が導けたので、$X \in \mathbf{R} \Rightarrow \forall y \in \mathbf{R}.\, X \subset Y \vee Y \subset X$。
(23) よって、$\forall X \in \mathbf{R}.\, \forall Y \in \mathbf{R}.\, X \subset Y \vee Y \subset X$。[全称量化子の導入]

全順序律が成り立つことの証明例 (その2)　両刀論法を使うのではなく、$\neg(X \subset Y)$ を仮定して、そこから $Y \subset X$ を導いても、全順序律が成り立つことの証明ができます。

(1) $X \in \mathbf{R}$ と仮定する。

(2) $Y \in \mathbf{R}$ と仮定する。

(3) $\neg(X \subset Y)$ と仮定する。

(4) つまり、$\neg(\forall x \in X.\, x \in Y)$。

(5) ド・モルガン律により、$\exists x \in X.\, x \notin Y$。つまり、$\exists x.\, x \in X \wedge x \notin Y$。

(6) $x \in X \wedge x \notin Y$ と仮定する。

(7) $y \in Y$ と仮定する。

(8) 有理数の大小関係 $\leqq$ は全順序であるから、$x \leqq y \vee y \leqq x$ である。

(9) $x \leqq y$ とする。

(10) すると、(7) と (2)、実数の定義 (e) より、$x \in Y$。

(11) これは (6) と矛盾する。

(12) ゆえに、(9) の仮定は否定され、$\neg(x \leqq y)$ である。

(13) よって、(8) より、$y \leqq x$。

(14) ゆえに、(6) の $x \in X$ と (1) および実数の定義 (e) より、$y \in X$。

(15) (7) の仮定から (14) が導けたので、$y \in Y \Rightarrow y \in X$。

(16) よって、$\forall y \in Y.\, y \in X$。[全称量化子の導入]

(17) つまり、$Y \subset X$ である。

(18) (6) から (17) が導けたので、(5) より、$Y \subset X$。[存在量化子の除去]

(19) (3) の仮定から (18) が導けたので、$\neg(X \subset Y) \Rightarrow Y \subset X$。

(20) つまり、$X \subset Y \vee Y \subset X$ である。

(21) (2) の仮定から (20) が導けたので、$Y \in \mathbf{R} \Rightarrow X \subset Y \vee Y \subset X$。

(22) よって、$\forall Y \in \mathbf{R}.\, X \subset Y \vee Y \subset X$。[全称量化子の導入]

(23) (1) の仮定から (22) が導けたので、$X \in \mathbf{R} \Rightarrow \forall y \in \mathbf{R}.\, X \subset Y \vee Y \subset X$。

(24) よって、$\forall X \in \mathbf{R}.\, \forall Y \in \mathbf{R}.\, X \subset Y \vee Y \subset X$。[全称量化子の導入]

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 10 回・終わり