集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 9 回

2022 年 12 月 2 日

今回の内容

9.1　全称記号や存在記号に関する推論の規則

第 2 回では命題論理に関する推論の規則を紹介しましたが、今回は、命題論理の述語論理への拡張とともに現れる全称記号や存在記号に関する基本的な推論の規則を紹介します。

全称量化子の導入　全称記号によって量化された論理式は $\forall x\, A(x)$ の形をしています。ここで、$A(x)$ は、論理式 A の中に、個体変数 x が自由に出現している (かもしれない) ことを表しています。このような論理式を導出する際の基本は、x に関する何の条件もつけずに $A(x)$ を導くことです。この推論の規則を第 2 回と同様に表現すると次のようになります。

$$\frac{A(x) \qquad x\text{ が自由に出現する仮定がない}}{\forall x.\, A(x)}$$

x が自由に出現する仮定がない、つまり、x に関する何の条件もない状態で $A(x)$ が導けたということは、任意の x について、$A(x)$ が成立するということになります。よって、このような場合は、$\forall x.\, A(x)$ を導くことができます。

注意　ある集合 D に対して、$\forall x \in D.\, A(x)$ の形の論理式を導きたい場合は、

$$\forall x \in D.\, A(x) \iff \forall x\, (x \in D \Rightarrow A(x))$$

であることに注意して、まず $x \in D$ を仮定した上で、$A(x)$ を導き、そこから

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[x \in D]\\ \vdots \\ A(x)\end{array}}{x \in D \Rightarrow A(x)} \quad x\text{ が自由に出現する仮定がない}}{\forall x\, (x \in D \Rightarrow A(x))}$$

のように、第 2 回で紹介した「含意の導入」を行ってから「全称量化子の導入」を行います。「含意の導入」で $x \in D \Rightarrow A(x)$ を導いたときには、$x \in D$ という仮定はなくなってしまっていますので、「全称量化子の導入」を行うための「x が自由に出現する仮定がない」という条件が満たされていることに注意してください。

メモ

全称量化子を持つ論理式の利用　一方、$\forall x\, A(x)$ という形の論理式がすでに導かれている場合に、これを利用した推論を行いたい場合は

$$\frac{\forall x.\, A(x)}{A(t)}$$

という推論の規則を使うことができます。t は対象 (個体) を表す任意の式です。この規則は「全称量化子の除去」と呼ばれます。すべての x について $A(x)$ が成り立つことがすでに導かれているのなら、$A(x)$ に自由に出現している x を、自分の好きな式 t で置き換えてよいはずです。

注意　ある集合 D に対して、$\forall x \in D.\, A(x)$ の形の論理式が導かれている場合は、

$$\forall x \in D.\, A(x) \iff \forall x\,(x \in D \Rightarrow A(x))$$

に注意すると、$t \in D$ を導くことができれば、

$$\frac{t \in D \qquad \dfrac{\forall x\,(x \in D \Rightarrow A(x))}{t \in D \Rightarrow A(t)}}{A(t)}$$

のように「Modus Ponens」を組み合わせると、$A(t)$ を導くことができます。

メモ

存在量化子の導入　存在記号によって量化された $\exists x\, A(x)$ の形の論理式を導出するには、$A(x)$ 中の自由な x の出現を適当な式 t で置き換えてできる論理式 $A(t)$ を導けば十分です。t はどんな式でも構いません。この推論の規則は次のように表現できます。

$$\frac{A(t)}{\exists x.\, A(x)}$$

注意　ある集合 D に対して、$\exists x \in D.\, A(x)$ の形の論理式を導きたい場合は、

$$\exists x \in D.\, A(x) \iff \exists x\,(x \in D \wedge A(x))$$

であることに注意して、適当な式 t に対して $t \in D$ と $A(t)$ を導きます。そこから、第 2 回で紹介した「その他の規則」の内の一つを使って、$x \in D \wedge A(t)$ を導いてから、

$$\frac{\dfrac{t \in D \qquad A(t)}{t \in D \wedge A(t)}}{\exists x\,(x \in D \wedge A(x))}$$

のように「存在量化子の導入」を行います。

存在量化子を持つ論理式の利用　$\exists x\, A(x)$ という形の論理式がすでに導かれている場合に、これを利用して、ある論理式 C を導きたい場合は、$A(x)$ が成り立つことを仮定し、そこから C を導きます。この推論はつぎのような規則となります。

$$\dfrac{\exists x.\, A(x) \qquad \begin{array}{c}[A(x)]\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad x \text{ は } A(x) \text{ 以外の仮定や } C \text{ に自由に現れていない}}{C}$$

この規則は「存在量化子の除去」と呼ばれます。$\exists x\, A(x)$ という論理式は、$A(x)$ を満たすような x が少なくとも一つ存在することを意味しますから、その x がどのようなものであっても、$A(x)$ から C が導けるのなら、C が成り立つということを表しています。

注意　この規則では、存在量化子 $\exists x$ の束縛変数と仮定 $A(x)$ の自由変数として、x という同じ 変数が使われていますが

$$\dfrac{\exists x.\, A(x) \qquad \begin{array}{c}[A(y)]\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad y \text{ は } A(y) \text{ 以外の仮定や } C \text{ に自由に現れていない}}{C}$$

と書き表しても同じ意味になります。

メモ

注意　$\exists x\, A(x)$ という論理式がその存在を主張している x に関しては、$A(x)$ という性質だけが保証されていますので、x に関する他の性質を勝手に仮定することはできません。このため、この推論の規則を使用する場合には、$A(x)$ 以外の仮定に x は自由に出現してはいけません。例えば、実数を対象とする推論をしているとします。もし、「x は $A(x)$ 以外の仮定には自由に現れていない」という条件なしに「存在量化子の除去」規則が使えてしまうと、

$$\dfrac{\exists x\,(0 < x) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}x < 0 \qquad [0 < x]\\ \vdots \\ x < x\end{array}}{\exists x\,(x < x)}}{\exists x\,(x < x)}$$

のような推論ができてしまいます。ここで、$\exists x\,(0 < x)$ は別途導くことができますので、

$$\begin{array}{c} x < 0 \\ \vdots \\ \exists x\,(x < x) \end{array}$$

というような推論が可能です。すると、ここからさらに

$$\dfrac{\exists x\,(x < 0) \qquad \begin{array}{c} [x < 0] \\ \vdots \\ \exists x\,(x < x) \end{array}}{\exists x\,(x < x)}$$

のような推論ができてしまいます。$\exists x\,(x < 0)$ も別途導くことができますので、結局、$\exists x\,(x < x)$ という間違った結論を得ることができてしまいます。

$\exists x\,(0 < x)$ も $\exists x\,(x < 0)$ も正しい論理式ですが、「$0 < x$ を成り立たせる x」と「$x < 0$ を成り立たせる x」は異なります。上の例では、この 2 つの x を混同してしまったために、おかしな結論が得られてしまっています。

注意　この「存在量化子の除去」規則では、x は C の中に自由に出現してもいけません。C が自由変数として x を含む場合、C が成り立つのは、$\exists x\, A(x)$ が存在するとしている特定の x についてだけです。ところが、一旦、この規則で C が導かれてしまうと、そこから「全称量化子の導入」によって $\forall x\, C$ が得られてしまいますので、おかしなことになってしまいます。

例えば、実数を対象とする推論をしているとします。もし、「x は C に自由に現れていない」という条件がないものとすると、$\exists x\,(1 < x)$ が導けることから

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\,(1 < x) \qquad \begin{array}{c} [1 < x] \\ \vdots \\ 1 < x^2 \end{array}}{1 < x^2}}{\forall x\,(1 < x^2)}$$

という推論ができてしまい、$\forall x\,(1 < x^2)$ という間違った結論を得ることができてしまいます。

メモ

存在量化子を持つ論理式を利用するもう一つの方法　「存在量化子の除去」の規則を用いずに、この規則に相当する推論をすることもあります。$\exists x.\, A(x)$ は、$A(x)$ を満たす x が存在することを意味していますが、$A(x)$ の真偽は、$A(x)$ の中に自由に現れている変数の値によって変わります。

よって、$A(x)$ を成り立たせる x も、$A(x)$ の x 以外の自由変数の値によって変わることになります。$A(x)$ の中に自由に現れている x 以外の変数が $y_1, y_2, \ldots, y_n$ である場合、これらの変数の値の組に対して、$A(x)$ を成り立たせる x を対応させる写像を f とすると $A(f(y_1, y_2, \ldots, y_n))$ が真となるはずです。そこで、

> $\exists x\, A(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ より、$A(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ が成り立つような x が存在する。
> このような x を $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ とおくと、$A(f(y_1, y_2, \ldots, y_n), y_1, y_2, \ldots, y_n)$ が成り立つ。よって、...

のように論証を続けていくことができます。ただし、f は全く新しく登場させた写像 (を表す変数) でないといけませんし、この f に対して「全称量化子の導入」を行って $\forall f.\, B(f)$ の形の論理式を導くことは許されません。

この特別な場合として、$n = 0$ のときには、新しい個体変数 c を登場させて、次のような論証をすることになります。

> $\exists x\; A(x)$ より、$A(x)$ が成り立つような x が存在する。このような x を c とおくと、$A(c)$ が成り立つ。よって、...

この場合も、c に対して「全称量化子の導入」を行って $\forall c.\, B(c)$ の形の論理式を導くことは許されません。

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 9 回・終わり