集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 8 回

2022 年 11 月 25 日

今回の内容

8.1　最大と最小

R が集合 D 上の半順序[1]で、A が D の部分集合であるとき、次の条件を満たすような x を「A の**最大要素**」あるいは「A の**最大元**」と呼び、$\max A$ と書き表します。

$$x \in A \wedge \forall y \in A.\, y\ R\ x$$

また、次の条件を満たすような x を「A の**最小要素**」あるいは「A の**最小元**」と呼び、$\min A$ と書き表します。

$$x \in A \wedge \forall y \in A.\, x\ R\ y$$

注意　ここで言う「最大」や「最小」という用語は、「$x\ R\ y$」を「y は x と等しいか x より大きい」と解釈した場合の大小関係に基づいています。逆に、「$x\ R\ y$」を「y は x と等しいか x より小さい」と解釈すれば、最大要素と最小要素の定義は入れ替わることになります。どちらの解釈に基づく定義でもよいのですが、この科目では便宜的に前者のように解釈した定義を採用することにします。

メモ

注意　最大要素や最小要素は存在しない場合もあります。例えば、実数全体 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ を順序関係として考えるとき、

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqq 1 \,\}$$

のように定義される集合 A の最大要素は 1 ですが、最小要素は存在しません。また、有限集合 $D = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \,\}$ 上の半順序を図 1 のハッセ図で表すことができたとすると、この集合 D には最小要素として 5 が存在しますが、最大要素は存在

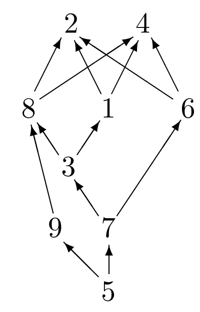

図 1: 最大要素がない例

[1] もちろん、全順序でも構いません。

しません。一方、D の部分集合 $\{2,3,6\}$ には最大要素として 2 が存在しますが、最小要素は存在しません。

注意　最大要素や最小要素は、それぞれ、もし存在するのなら、ただ一つに決まります。

8.2　極大と極小

R が集合 D 上の半順序で、A が D の部分集合であるとき、次の条件[2]を満たすような x を「A の**極大要素**」あるいは「A の**極大元**」と呼びます。

$$x \in A \land \forall y \in A.\, y \neq x \Rightarrow \neg(x\ R\ y)$$

また、次の条件[3]を満たすような x を「A の**極小要素**」あるいは「A の**極小元**」と呼びます。

$$x \in A \land \forall y \in A.\, y \neq x \Rightarrow \neg(y\ R\ x)$$

注意　極大要素や極小要素は存在しない場合もあります。例えば、実数全体 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ を順序関係として考えるとき、次のように定義される集合 A には極大要素も極小要素もありません。

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \,\}$$

一方、集合 $D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 上の半順序として、図 1 のハッセ図のようなものを考えると、D の空でない部分集合には、必ず、極大要素と極小要素がそれぞれ少なくとも一つ存在します。一般に、有限集合上の半順序の場合、その空でない部分集合には、必ず、極大要素と極小要素がそれぞれ少なくとも一つ存在します。

注意　極大要素や極小要素は複数存在することがあります[4]。図 1 のハッセ図のような半順序の場合、集合 $\{1,3,7,8,9\}$ の極大要素は 1 と 8 で、極小要素は 7 と 9 となります。

注意　x が A の最大要素であるのなら、x は A のただ一つの極大要素となります。同様に、x が A の最小要素であるのなら、x は A のただ一つの極小要素となります。

メモ

8.3　上界と下界

R が集合 D 上の半順序で、A が D の部分集合であるとき、次の条件を満たすような x を「A の**上界**(じょうかい)」と呼びます。

$$x \in D \land \forall y \in A.\, y\ R\ x$$

[2] ド・モルガン律を使うと、この条件は「$x \in A \land \neg\exists y \in A.\, y \neq x \land x\ R\ y$」と書き換えることができます。

[3] 同様に、この条件は「$x \in A \land \neg\exists y \in A.\, y \neq x \land y\ R\ x$」と書き換えることができます。

[4] A が無限集合であれば、無限に存在することもあります。

また、次の条件を満たすような x を「A の**下界**(かかい)」と呼びます。

$$x \in D \land \forall y \in A.\, x\ R\ y$$

集合 A の上界や下界は、必ずしも A に属する必要はないことに注意してください。

注意　上界や下界は存在しない場合があります。また、それぞれ複数存在することがあります[5]。例えば、実数全体 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ を順序関係として考えるとき、

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \,\}$$

のように定義される集合 A を考えると、1 以上の実数はどれも A の上界です。また、A の下界は存在しません。A が $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leqq 1 \,\}$ だったとしても同じです。

また、集合 $D = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,\}$ 上の半順序として、図 1 のハッセ図のようなものを考えると、集合 $\{\, 1, 7, 8 \,\}$ の上界は 2 と 4 で、下界は 5 と 7 となります。また、集合 $\{\, 2, 4, 8 \,\}$ の上界は存在せず、下界は 3、5、7、8、9 の 5 つとなります。

注意　A が空集合の場合、D の任意の要素は、A の上界であり、下界でもあります。

注意　A の上界 x が A に属するのなら、x は A の最大要素となります。同様に、A の下界 x が A に属するのなら、x は A の最小要素となります。

注意　$D = A$ の場合、A の上界と A の最大要素は同じものとなり、A の下界と A の最小要素は同じものとなります。

メモ

有界　集合 D 上の半順序が定められているものとします。D の部分集合 A の上界が (D の中に) 存在するとき、「A は**上に有界**」であると言います。同様に、A の下界が (D の中に) 存在するとき、「A は**下に有界**」であると言います[6]。

メモ

[5] D が無限集合であれば、無限に存在することもあります。

[6] D の部分集合 A が上に有界であり、かつ、下に有界であるとき、「A は (この順序に関して) 有界」であると言うことがあります。ただし、数学では、「距離」という概念に付随して、「有界」という用語を別の意味で用いますので注意が必要です。

8.4　上限と下限

R が集合 D 上の半順序で、A を D の部分集合とします。x が A の上界全体の最小要素であるとき、つまり、x が次の集合の最小要素であるとき、この x を「A の**上限**(じょうげん)」と呼び、$\sup A$ あるいは $\operatorname{lub} A$ と書き表します[7]。

$$\{\, x \in D \mid x \text{ は } A \text{ の上界} \,\}$$

同様に、x が A の下界全体の最大要素であるとき、つまり、x が次の集合の最大要素であるとき、x を「A の**下限**(かげん)」と呼び、$\inf A$ あるいは $\operatorname{glb} A$ と書き表します[8]。

$$\{\, x \in D \mid x \text{ は } A \text{ の下界} \,\}$$

注意　上限や下限は存在しない場合があります。一方、それぞれ、存在するのならただ 1 つに決まります。また、集合 A の上限や下限は、存在したとしても、A に属するとは限りません。例えば、実数全体 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ を順序関係として考えるとき、

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \,\}$$

のように定義される集合 A を考えると、A の上限は 1 ですが、下限は存在しません。A が $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leqq 1 \,\}$ だったとしても、上限は 1 であり、下限は存在しません。

　また、集合 $D = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \,\}$ 上の半順序として、図 1 のハッセ図のようなものを考えると、集合 $\{\, 1, 8, 6 \,\}$ の上限は存在せず、下限は 7 となります。また、集合 $\{\, 3, 7, 9 \,\}$ の上限は 8 で、下限は 5 となります。

注意　実数全体 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ を順序関係として考えるとき、$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば、A の上限が存在します。同様に、A が下に有界ならば、A の下限が存在します。ただし、このことを証明するためには、実数やその大小関係の定義を厳密に行わなければなりません。詳しくは、「付録: デデキント切断による実数の定義」を参照してください。

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 8 回・終わり

[7]「sup」は supremum を、「lub」は least upper bound を意味しています。

[8]「inf」は infimum を、「glb」は greatest lower bound を意味しています。

8.5　付録: デデキント切断による実数の定義

例えば、実数全体 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ を順序関係とみなしたとき、

空でない実数の集合 A が上に有界ならば、A の上限が存在する

という命題を証明するためには、その前に、実数やその大小関係をしっかり定義しておく必要があります。ここでは、有理数とその大小関係や四則演算がすでに定義されているものとして、そこから、実数とその大小関係、四則演算を定義していく方法の一つを紹介します。ここで紹介する方法は「デデキント切断による実数の定義」と呼ばれます。

実数の定義　有理数全体 $\mathbb{Q}$ とその大小関係 $\leqq$ や四則演算 (加減乗除) がすでに定義されているものとします。次の 5 つの条件をすべて満たすような集合 X を「有理数の切断」と呼び、「実数」とは、この「有理数の切断」のことであると定義します[9]。

(a) $X \subset \mathbb{Q}$

(b) $X \neq \{\,\}$

(c) $X \neq \mathbb{Q}$

(d) $\forall x \in X.\ \exists y \in X.\ x < y$

(e) $\forall x \in X.\ \forall y \in \mathbb{Q}.\ y \leqq x \Rightarrow y \in X$

つまり、「実数」とは「$\mathbb{Q}$ の空でない真部分集合 X で、最大要素を持たず、ある有理数を含むのなら、それ以下の有理数もすべて含むようなもの」ということになります。

新しい「有理数」　「実数」であるような、つまり、(a) ～ (e) の 5 つの条件を満たすような集合全体を $\mathbf{R}$ で書き表すことにします。$\mathbf{R}$ の要素は、すべて $\mathbb{Q}$ の部分集合であることに注意してください。ここで、$\mathbb{Q}$ の各要素 x に対して、x^* を

$$x^* = \{\, y \in \mathbb{Q} \mid y < x \,\}$$

と定義すると、$\mathbb{Q}$ の要素 x は、x^* という「実数」に対応させることができます。つまり、ある有理数 x を使って x^* と表すことのできる $\mathbf{R}$ の要素を、新しく「有理数」とみなすことができます。

メモ

[9]条件 (d) に現われている $x < y$ は、もちろん、$x \neq y \wedge x \leqq y$ を意味します。

実数の大小関係の定義　このように定義された「実数」の大小関係 $\leqq$ は、次のように定義します。

$$X \leqq Y \iff X \subset Y$$

この定義による $\mathbf{R}$ 上の二項関係 $\leqq$ が全順序となること、また、この $\leqq$ が、$\mathbb{Q}$ 上の大小関係を反映していること、つまり

$$\forall x \in \mathbb{Q}.\ \forall y \in \mathbb{Q}.\ (x \leqq y \Rightarrow x^* \leqq y^*) \land (x^* \leqq y^* \Rightarrow x \leqq y)$$

が成り立つことが容易に分かります。

実数の加算の定義　2 つの「実数」X と Y の和は次のように定義します。

$$X + Y \ = \ \{\, z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in X\ .\exists y \in Y.\ z = x + y \,\}$$

X と Y が (a) ～ (e) の 5 つの条件を満たせば、このように定義される $X + Y$ もこれら 5 つの条件を満たします。また、$\mathbb{Q}$ の要素 x と y に対しては、

$$x^* + y^* = (x + y)^*$$

が成り立つことが分かります。少々工夫が必要となりますが、うまくやると、同様に「実数」の間の減算や乗算、除算も定義することができます。

メモ

実数の性質の証明の例　以上のように「実数」とその大小関係、四則演算を定義すると、前ページの

　　空でない実数の集合 A が上に有界ならば、A の上限が存在する

という命題を次のように証明することができます。

証明　A は $\mathbf{R}$ の空でない部分集合で、$\mathbf{R}$ 上の順序関係 $\leqq$ に関して上に有界であると仮定する。ここで $S = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid \exists Y \in A.\ x \in Y \,\}$ とする。この S が A の上限となること示せばよい。このためには、次の 3 つを示せば十分である。

(1) $S \in \mathbf{R}$

(2) S は A の上界

(3) $\forall X \in \mathbf{R}.\ (X$ は A の上界$) \Rightarrow S \leqq X$

まず、以下のように、S は「実数」に関する (a) ～ (e) の条件を満たす。よって、(1) が得られる。

(a) S の定義より、明らかに $S \subset \mathbb{Q}$。

(b) $A \neq \{\}$ であるから、$Y \in A$ となる Y が存在する。$A \subset \mathbf{R}$ であるから、$Y \in \mathbf{R}$ であり、よって、$Y \neq \{\}$。つまり、$S \neq \{\}$。

(c) A は上に有界なので、$\forall Y \in A.\, Y \subset X$ を満たすような $X \in \mathbf{R}$ が存在する。ここで、$X \neq \mathbb{Q}$ であるから、$z \notin X$ であるような $z \in \mathbb{Q}$ が存在する。つまり、$\forall Y \in A.\ z \notin Y$。ゆえに、$z \notin S$。よって、$S \neq \mathbb{Q}$。

(d) $x \in S$ とすると、$Y \in A \wedge x \in Y$ を満たすような Y が存在する。$Y \in \mathbf{R}$ であるから、Y は最大要素を持たない。つまり、$\exists y \in Y.\ x < y$。ゆえに、$\exists y \in S.\ x < y$ であり、よって、$\forall x \in S.\ \exists y \in S.\ x < y$。

(e) $x \in S$ とすると、$Y \in A \wedge x \in Y$ を満たす Y が存在する。$Y \in \mathbf{R}$ であるから、$\forall y \in \mathbb{Q}.\ y \leqq x \Rightarrow y \in Y$。ゆえに、$\forall y \in \mathbb{Q}.\ y \leqq x \Rightarrow y \in S$ であり、よって、$\forall x \in S.\ \forall y \in \mathbb{Q}.\ y \leqq x \Rightarrow y \in S$。

次に、(2) を示す。$Y \in A$ とすると、S の定義により、$\forall x \in Y. x \in S$。つまり、$Y \subset S$。ゆえに、$\mathbf{R}$ 上の $\leqq$ の定義により、$Y \leqq S$。よって、S は A の上界である。

最後に、(3) を示す。X が A の上界である、つまり、

$$\forall Y \in A.\, Y \subset X$$

と仮定すると、S の定義より、$\forall x \in S.\, x \in X$。よって $S \subset X$、つまり $S \leqq X$ となる。[証明終り]