集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 7 回

2022 年 11 月 18 日

今回の内容

7.1　同値関係

集合 D 上の二項関係 R が次の 3 つの性質をすべて満たすとき、「R は D 上の**同値関係**である」といいます。

反射律　$\forall x \in D.\, x \mathrel{R} x$

推移律　$\forall x \in D.\, \forall y \in D.\, \forall z \in D.\, (x \mathrel{R} y) \land (y \mathrel{R} z) \Rightarrow (x \mathrel{R} z)$

対称律　$\forall x \in D.\, \forall y \in D.\, (x \mathrel{R} y) \Rightarrow (y \mathrel{R} x)$

例えば、D が整数全体 $\mathbb{Z}$ であるとするとき、

$$x \mathrel{R} y \iff x = y$$

と R を定義すると、この R は D 上の同値関係の 1 つとなります。また、

$$x \mathrel{R} y \iff x \text{ と } y \text{ は} 7 \text{ を法として合同}^{1}$$

と定義される R も D 上の同値関係の 1 つです。

メモ

注意　D 上の同値関係を $D \times D\ (= D^2)$ の部分集合と考えたとき、すべての同値関係は、通常 $=$ で書き表される「等しい」という二項関係、つまり

$$\{\, \langle x,\, x \rangle \in D^2 \mid x \in D \,\}$$

という二項関係を含みます。この $=$ は、D の同値関係の内、最も小さいものです。また、逆に、D 上の最も大きい同値関係は D^2 自身となります。

[1]「$x - y$ が 7 の倍数である」という意味です。

注意　D が n 個の要素からなる有限集合であるとき、D 上の同値関係は、(空でない) いくつかのグループへの D の分割の仕方と同じだけ存在します。例えば、$D = \{1, 2, 3\}$ である場合、D のこのような分割の仕方は、

$$\begin{array}{l} \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ \{1\}, \{2, 3\} \\ \{1, 2\}, \{3\} \\ \{1, 3\}, \{2\} \\ \{1, 2, 3\} \end{array}$$

の 5 通りありますので、この D 上の同値関係も 5 通りあります。

メモ

同値類　D 上の同値関係 R と D の要素 x が与えられているとき、集合 (D の部分集合)

$$\{ y \in D \mid x \, R \, y \}$$

を「R による x の**同値類**」と呼び、この集合を

$$[x]_R \quad \text{あるいは、単に} \quad [x]$$

と書き表します。つまり、x の同値類 $[x]_R$ とは「R の意味で x と同値な D の要素全体」のことです。単に、$[x]$ とだけ書く場合は、今、どのような同値関係 R を考えているかが定まっていないといけないことに注意してください。

メモ

注意　同値関係では反射律が成り立ちますので、当然、$x \in [x]$ となります。また、$x \; R \; y$ ならば $[x] = [y]$ です。例えば、整数全体 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $x \; R \; y$ を「x と y は 7 を法として合同」と定義すると、整数 8 の同値類 $[8]$ は

$$[8] = \{ \ldots, -20, -13, -6, 1, 8, 15, 22, \ldots \}$$

となり、$\ldots = [-20] = [-13] = [-6] = [1] = [8] = [15] = [22] = \ldots$ が成り立ちます。

商集合　D 上の同値関係 R が与えられているとき、D の要素の同値類全体を「R による D の**商集合**」と呼び、

$$D/R$$

と書き表します。整数全体 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $x\ R\ y$ を「x と y は 7 を法として合同」と定義した例では、「R による $\mathbb{Z}$ の**商集合**」は、次のような集合となります。

$$\begin{array}{l} \{ \\ \quad \{\ldots,\ -21,\ -14,\ -7,\ 0,\ 7,\ 14,\ 21,\ \ldots\}, \\ \quad \{\ldots,\ -20,\ -13,\ -6,\ 1,\ 8,\ 15,\ 22,\ \ldots\}, \\ \quad \{\ldots,\ -19,\ -12,\ -5,\ 2,\ 9,\ 16,\ 23,\ \ldots\}, \\ \quad \{\ldots,\ -18,\ -11,\ -4,\ 3,\ 10,\ 17,\ 24,\ \ldots\}, \\ \quad \{\ldots,\ -17,\ -10,\ -3,\ 4,\ 11,\ 18,\ 25,\ \ldots\}, \\ \quad \{\ldots,\ -16,\ -9,\ -2,\ 5,\ 12,\ 19,\ 26,\ \ldots\}, \\ \quad \{\ldots,\ -15,\ -8,\ -1,\ 6,\ 13,\ 20,\ 27,\ \ldots\} \\ \} \end{array}$$

R がこう定められていることが明確なら、$\{\ [0],\ [1],\ [2],\ [3],\ [4],\ [5],\ [6]\ \}$ と書いても同じです。

メモ

同値類の代表　D 上の同値関係 R が与えられていて、

$$\forall C \in D/R.\ f(C) \in C$$

を満たすような D/R から D への写像 f が 1 つ定まっているとき、$f(C)$ を「同値類 C の**代表**」あるいは「同値類 C の**代表元**」と呼びます。写像 f に関するこの条件は、f が、各同値類 C に対して、その C の代表となる要素を 1 つ選ぶような写像であることを意味しています[2]

例えば、整数全体 $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $x\ R\ y$ を「x と y は 7 を法として合同」と定義したのなら、

$$f(C) = (x \in C \text{ を満たすような最小の非負の整数 } x)$$

と定義すれば、$\{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \}$ が D/R の代表全体となります[3]。

メモ

[2] どの同値類も空集合ではありませんので、このような写像 f は必ず存在すると考えることができますが、実は、一般の D や R についてその存在が証明できる訳ではありません。しかし、数学では、多くの場合、このような写像 f が存在することを前提に議論します。この前提は「選択公理」と呼ばれます。

[3] 一般に、集合 D の部分集合 S が、$D/R = \{\ [x] \mid x \in S\ \}$ で、かつ、$\forall x \in S\ .\forall y \in S\ .([x] = [y]) \Rightarrow (x = y)$ であるとき、S を D/R の「完全代表系」と呼びます。

7.2　順序関係

半順序　集合 D 上の二項関係 R で、次の 3 つの性質をすべて満たすものを「D 上の**半順序**」、あるいは、「D 上の**半順序関係**」と呼びます[4]。

反射律	$\forall x \in D.\, x \mathrel{R} x$
推移律	$\forall x \in D.\, \forall y \in D.\, \forall z \in D.\, (x \mathrel{R} y) \wedge (y \mathrel{R} z) \Rightarrow (x \mathrel{R} z)$
反対称律	$\forall x \in D.\, \forall y \in D.\, (x \mathrel{R} y) \wedge (y \mathrel{R} x) \Rightarrow (x = y)$

例えば、ある集合 S のべき集合 $\mathcal{P}(S)$ 上の二項関係 $\subset$ や $\supset$ は、それぞれ $\mathcal{P}(S)$ 上の半順序となります。また、自然数全体 $\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を

$$x \mathrel{R} y \iff y \text{ は } x \text{ の倍数}$$

と定義すると、R は $\mathbb{N}$ 上の半順序の 1 つとなります。$x \mathrel{R} y$ を「x は y の倍数」と定義しても、やはり、$\mathbb{N}$ 上の半順序となります。

注意　一般に、R が D 上の半順序であれば、

$$x \mathrel{R'} y \iff y \mathrel{R} x$$

と定義される R' も D 上の半順序となります。

注意　D の要素の等しさを表す $=$ は、D 上の半順序でもあります。D 上の二項関係を D^2 の部分集合とみなすと、$=$ は最小の半順序です。つまり、D 上の半順序はすべて $=$ を含みます。

メモ

全順序　集合 D 上の半順序 (関係) R で、さらに次の性質を満たすものを、「D 上の**全順序**」、あるいは、「D 上の**全順序関係**」と呼びます。

全順序律　$\forall x \in D.\, \forall y \in D.\, (x \mathrel{R} y) \vee (y \mathrel{R} x)$

例えば、整数や実数の大小関係 $\leqq$ や $\geqq$ は、どちらも $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ 上の全順序です。一方、$<$ や $>$ については、反射律が成り立ちませんので、これらは半順序でさえありません。

メモ

[4]「半順序 (関係)」のことを、単に「順序 (関係)」と呼ぶこともあります。

ハッセ図　有限集合上の半順序 R を簡潔に表す方法の一つに「ハッセ (Hasse) 図」と呼ばれるものがあります。ハッセ図は、半順序が反射律と推移律を満たすことを前提に、$x\ R\ y$ が成り立つような x と y の組を、R を表すのに必要なものだけに限定して、x から y への矢印で結んだものです。例えば、

$$D = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \,\}$$

で、この D 上の半順序 R が

$$x \mathrel{R} y \iff y \text{ は } x \text{ の倍数}$$

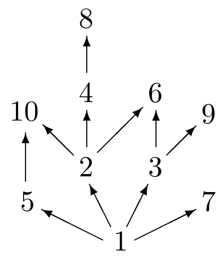

図 1: ハッセ図の例

と定義されている場合、この R をハッセ図で表現すると図 1 のようになります。$x \mathrel{R} y$ を x から y へ向かう矢印で表現する代りに、ハッセ図中で y を x より上方に位置させて[5]、x と y を単に線分で結んで表現することもあります。この場合、例えば、図 1 の矢印を線分で置き換えても、同じ R を表すことになります。

メモ

7.3　辞書式順序

集合 A_1 上の半順序 R_1 と集合 A_2 上の半順序 R_2 が定められているとき、次のように定義される二項関係 R を「直積 $A_1 \times A_2$ 上の**辞書式順序**」と呼びます。

$$\langle x_1,\, x_2 \rangle \mathrel{R} \langle y_1,\, y_2 \rangle \iff (x_1 \mathrel{R_1} y_1) \lor ((x_1 = y_1) \land (x_2 \mathrel{R_2} y_2))$$

辞書式順序は $A_1 \times A_2$ 上の半順序となります。R_1 と R_2 がどちらも全順序ならば、この 2 つから作られる辞書式順序は $A_1 \times A_2$ 上の全順序となります。

3つ以上の集合の直積上の辞書式順序　同様に、3 つ以上の集合 A_1、A_2、...、A_n 上に、それぞれ、半順序 R_1、R_2、...、R_n が定められているときも、次のように定義される二項関係 R を $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 上の辞書式順序と呼びます。

$$\begin{aligned} &\langle x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \rangle \mathrel{R} \langle y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \rangle \\ &\qquad \iff \exists i \in \mathbb{N}.\, (1 \leqq i \leqq n) \land (\forall j \in \mathbb{N}.\, (1 \leqq j \leqq i) \Rightarrow (x_j = y_j)) \\ &\qquad\qquad \land ((i < n) \Rightarrow (x_{i+1} \fallingdotseq y_{i+1}) \land (x_{i+1} \mathrel{R_i} y_{i+1})) \end{aligned}$$

3 つ以上の集合の直積上の辞書式順序も半順序となります。また、R_1、R_2、...、R_n がすべて全順序であれば、辞書式順序 R も全順序となります。

[5]右方に位置させる場合もあります。

注意　集合 A_1、A_2、...、A_n 上に、それぞれ、半順序 R_1、R_2、...、R_n が定められているとき、次のように定義される R も、$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 上の半順序となります。

$$\langle x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\rangle \; R \; \langle y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n\rangle \iff (x_1 \; R_1 \; y_1) \wedge (x_2 \; R_2 \; y_2) \wedge \cdots \wedge (x_n \; R_n \; y_n)$$

ただし、たとえ、R_1、R_2、...、R_n がすべて全順序でも、特別な場合を除けば、R は全順序となりません[6]。例えば、直積 $\mathbb{R}^2$ 上の二項関係 $\leqq$ を

$$\langle x_1,\, y_1\rangle \leqq \langle x_2,\, y_2\rangle \iff (x_1 \leqq x_2) \wedge (y_1 \leqq y_2)$$

と定義すると、この $\leqq$ は $\mathbb{R}^2$ 上の半順序となりますが、全順序とはなりません。

メモ

7.4　順序関係のいくつかの例

写像で決まる商集合の順序関係の例　集合 A から集合 B への写像 f と、B 上の半順序 R_B が定められているとき、A 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

と定めると、次のように定義される二項関係 R は $A/\!\sim$ 上の半順序となります[7]。

$$[x] \; R \; [y] \iff f(x) \; R_B \; f(y)$$

さらに、R_B が B 上の全順序であれば、R は $A/\!\sim$ 上の全順序になります。

写像に関する順序関係の例　集合 A から集合 B への写像で構成された集合 F と、B 上の半順序 R_B が定められているとき、二項関係 R を次のように定義すると、R は F 上の半順序となります。

$$f \; R \; g \iff \forall x \in A.\, f(x) \; R_B \; g(x)$$

この場合、たとえ R_B が全順序でも、R が全順序となるとは限らないので注意が必要です。例えば、実数全体 $\mathbb{R}$ から実数全体 $\mathbb{R}$ への関数全体 F に対して、$\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ を利用して、F 上の二項関係 $\leqq$ を

$$f \leqq g \iff \forall x \in \mathbb{R}.\, f(x) \leqq g(x)$$

と定義すると、この $\leqq$ は、半順序ではありますが、全順序とはなりません。

---

[6] 全順序となるのは、複数の要素からなる集合が A_1、A_2、...、A_n に含まれていないか、あるいは、1 つだけしか含まれていない場合のみです。

[7] $[x_1] = [x_2]$ であれば、$x_1 \sim x_2$ なので、$f(x_1) = f(x_2)$ であることに注意してください。

複素数の順序関係　複素数全体 $\mathbb{C}$ 上の順序関係について考えてみます。例えば、実数の順序対 $\langle a, b\rangle$ で複素数を $a+bi$ と表現し、$\mathbb{R}$ 上の大小関係 $\leqq$ に基づく $\mathbb{R}^2$ 上の辞書式順序を考えれば、これは $\mathbb{C}$ 上の全順序となります。つまり、

$$a_1 + b_1 i \leqq a_2 + b_2 i \iff (a_1 \leqq a_2) \vee ((a_1 = a_2) \wedge (b_1 \leqq b_2))$$

と定義される二項関係 $\leqq$ は $\mathbb{C}$ 上の全順序です。

しかし、この $\leqq$ については、複素数の和や積との関係が、実数のそれとは大きく異なってしまっています。実数の和や積と実数の大小関係 $\leqq$ は、

(a) $\forall x. \forall y. \forall z. (x \leqq y) \Rightarrow (x + z \leqq y + z)$

(b) $\forall x. \forall y. \forall z. (x \leqq y) \wedge (0 \leqq z) \Rightarrow (x \times z \leqq y \times z)$

の 2 つの性質[8]を満たしていますが、上のように定義した $\mathbb{C}$ 上の $\leqq$ は、(a) は満たしますが、(b) を満たしません。

実は、これら (a) と (b) の性質をともに満すような $\mathbb{C}$ 上の全順序は存在しません。これは以下のように示すことができます。

(1) (a) と (b) をともに満たすような $\mathbb{C}$ 上の全順序 $\leqq$ が存在すると仮定する。
(2)　ここでさらに、$i \leqq 0$ と仮定する。
(3)　　すると、(a) より、$i + (-i) \leqq 0 + (-i)$、つまり、$0 \leqq -i$ である。
(4)　　ゆえに、(2) と (b) より、$i \times (-i) \leqq 0 \times (-i)$、つまり、$1 \leqq 0$。
(5)　　よって、(a) より、$1 + (-1) \leqq 0 + (-1)$、つまり、$0 \leqq -1$。
(6)　　さらに、(3) と (b) より、$0 \times (-i) \leqq -1 \times (-i)$、つまり、$0 \leqq i$。
(7)　　すると、(1) の $\leqq$ に関する反対称律と (2) より $i = 0$ となり、$i \fallingdotseq 0$ と矛盾。
(8)　よって、(2) の仮定は否定され、$i \nleqq 0$ である。
(9)　ゆえに、(1) の $\leqq$ に関する全順序律により、$0 \leqq i$ となる。
(10)　すると、(b) より、$0 \times i \leqq i \times i$、つまり、$0 \leqq -1$。
(11)　よって、(9) と (b) より、$0 \times i \leqq -1 \times i$、つまり、$0 \leqq -i$。
(12)　ゆえに、(a) より、$0 + i \leqq -i + i$、つまり、$i \leqq 0$。
(13)　すると、(1) の $\leqq$ に関する反対称律と (9) より $0 = i$ となり、$0 \fallingdotseq i$ であることに矛盾。
(14) よって、(1) の仮定は否定され、(a) と (b) を満たす $\mathbb{C}$ 上の全順序 $\leqq$ は存在しない。

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 7 回・終わり

[8] $+$ や $\times$ などの演算の基本的な性質や (a) を前提とすると、(b) は、$\forall x. \forall y. (0 \leqq x) \wedge (0 \leqq y) \Rightarrow (0 \leqq x \times y)$ と同値になります。