集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 6 回

2022 年 11 月 11 日

今回の内容

6.1 順序対と直積集合

順序対 集合 A の要素 x と集合 B の要素 y を順に並べてできる 2 つ組を「A と B の**順序対**」と呼び、$\langle x,\, y\rangle$ と書き表します[1]。また、順序対の間の等しさは、次のように定義します。

$$\langle x_1,\, y_1\rangle = \langle x_2,\, y_2\rangle \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 = x_2 \ \text{かつ}\ y_1 = y_2$$

順序対では、2 つの要素を並べる順番が意味を持ちますので、$x = y$ でない限り、$\langle x,\, y\rangle = \langle y,\, x\rangle$ とはならないことに注意してください。

直積集合 集合 A と B の順序対全体を「A と B の**直積**(集合)」と呼び、この集合を

$$A \times B$$

と書き表します。A と B の直積 $A \times B$ は、次のような集合と考えることができます。

$$A \times B = \{\, \langle x,\, y\rangle \mid x \in A \ \text{かつ}\ y \in B \,\}$$

例えば、$A = \{\, 1,\, 2,\, 3 \,\}$、$B = \{\, 1,\, 2 \,\}$ のとき、

$$A \times B = \{\, \langle 1,\, 1\rangle,\, \langle 1,\, 2\rangle,\, \langle 2,\, 1\rangle,\, \langle 2,\, 2\rangle,\, \langle 3,\, 1\rangle,\, \langle 3,\, 2\rangle \,\}$$
$$B \times A = \{\, \langle 1,\, 1\rangle,\, \langle 1,\, 2\rangle,\, \langle 1,\, 3\rangle,\, \langle 2,\, 1\rangle,\, \langle 2,\, 2\rangle,\, \langle 2,\, 3\rangle \,\}$$

となります。

注意 A または B が空集合の場合、$A \times B$ も $B \times A$ も空集合となります。

3つ以上の集合の直積 3 つの集合 A、B、C のそれぞれの要素、x、y、z を順に並べてできる 3 つ組全体の集合は、$(A \times B) \times C$、あるいは $A \times (B \times C)$ と考えることができますが、通常、この 2 つを区別せずに $A \times B \times C$ のように書き表し、「A、B、C の直積 (集合)」と呼びます。$A \times B \times C$ の要素である x、y、z の 3 つ組は $\langle x,\, y,\, z\rangle$ と書き表します。4 つ以上の集合の直積も同様です。

注意 同じ集合 A の n 個の直積 $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\text{個}}$ を A^n のように書き表すことがあります。

メモ

[1] $(x,\, y)$ で表わすこともあります。

6.2 写像

集合 A の要素と集合 B 要素の対応の仕方で、集合 A の各要素に対して、集合 B 要素がただ 1 つ対応しているものを「A から B への**写像**」、あるいは「A から B への**関数**」と呼びます[2]。

ベン (Venn) 図中で集合の要素を • で表わし、対応している要素を線分で結んで表わすと、A から B の写像は、例えば、図 1 のような対応となります。

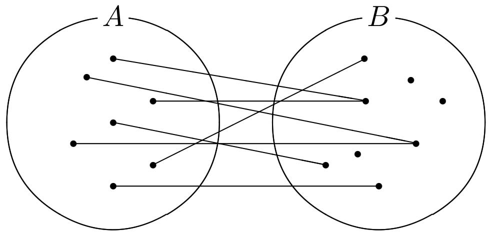

図 1: A から B への写像の例

一方、図 2 の 2 つの例のような対応は A から B への写像とはなりません。

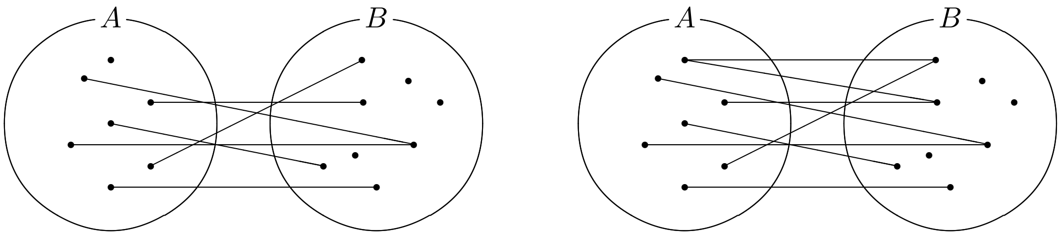

図 2: A から B への写像とならない対応の例

この科目では、f、g、h、... で写像 (関数) を表わすことにします。f が A から B への写像 (関数) であるとき、任意の $x \in A$ に対して、f により対応する $y \in B$ がただ 1 つ定まります。この y を $f(x)$ で表します。

メモ

始域と終域、値域、像　f が A から B への写像であることを

$$f \ : \ A \to B$$

と書き表します。このとき、A を「f の**始域**」、あるいは「f の**定義域**」と呼び、B を「f の**終域**」と呼びます。また、次の集合を「f の**値域**」と呼びます。

$$\{\, y \in B \mid \exists x \in A.\, y = f(x) \,\}$$

[2]数学では「関数」という用語を、集合 B が、整数、実数、複素数など、「数」の集合にとなっている場合に用い、それ以外の場合には、作用素や写像など、別の用語を用いることがあります。

一般に、始域 A の部分集合 C に対して、終域 B の部分集合 $f(C)$ を

$$f(C) = \{\, y \in B \mid \exists x \in C.\, y = f(x) \,\}$$

と定義し、この集合 $f(C)$ を「(f による) C の**像**」と呼びます。始域が A である写像 f の値域とは、f による始域の像に異なりません。

多変数関数と写像　例えば、二つの実数 x と y に対して値が決まるような実数値関数 $f(x,\, y)$ は、直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^2)$ を始域として、$\mathbb{R}$ を終域とする次のような写像と考えることができます。

$$f \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

一般に、いくつかの集合 A_1、A_2、...、A_n のそれぞれの要素 x_1、x_2、...、x_n の組に対して、集合 B の要素を 1 つ対応させる f は、次のような写像と考えることができます。

$$f \;:\; A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$$

メモ

直積集合の部分集合としての写像　直積集合 $A \times B$ の部分集合 R が

$$\forall x \in A.\, \exists y \in B.\, \langle x,\, y \rangle \in R \land (\forall z \in B.\, \langle x,\, z \rangle \in R \Rightarrow z = y)$$

という条件を満たしているとき、R は A から B への写像を表わしていると考えることができます。一意存在量化子を使うと、この条件は

$$\forall x \in A.\, \exists! y \in B.\, \langle x,\, y \rangle \in R$$

と書き表すことができます。

写像のグラフ　集合 A から集合 B への写像 f に対して、次の直積集合を「f の**グラフ**」と呼び、これを f と同一視します。

$$\{\, \langle x,\, f(x) \rangle \in A \times B \mid x \in A \,\}$$

この直積集合は上述の条件を満たしていることに注意してください。

メモ

注意　A が空集合の場合は、B がどのような集合であるかに関わらず、A から B への写像が (ただ一つ) 存在します。$\forall x \in A. C$ という形の論理式は、A が空集合なら、C に関わらず真となることに注意してください。この写像は、$A \times B$ の部分集合とみなすと、空集合となります[3]。

注意　一方、B が空集合の場合は、A が空集合でない限り、A から B への写像は存在しません。

注意　A と B がそれぞれ a 個と b 個の要素からなる有限集合の場合、A から B への写像は b^a 通り存在します[4]。

メモ

写像の定義　写像は様々な方法で定義されます。例えば、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を、変数 x と、その変数 x を使った数式を用いて、例えば

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

のように定義するのもその方法の 1 つです[5]。これと同じことを

$$f \ : \ x \ \mapsto \ x^2 + 2x + 3$$

のように書き表すこともあります。

また、A から B への写像は、一定の条件を満たすような $A \times B$ の部分集合 (グラフ) と考えることができますので、この部分集合を定義できれば、その写像を定義したことになります。例えば、$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$、$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ であるとき、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x - 1 & (x \fallingdotseq 0) \end{cases}$$

と定義される写像は

$$f = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$$

のように定義しても同じになります。これは、A の要素と B の要素の対応関係を次のような表で書き表すことに相当します。

A	B
0	0
1	0
2	1
3	2

[3] この場合、そもそも $A \times B$ 自体が空集合であることに注意してください。

[4] ただし、$0^0 = 1$ と考えるものとします。

[5] このような定義では、変数 x は、第 5 回で解説した量化子の束縛変数のような役割を持っていることに注意してください。束縛変数を他の変数に置き換えて t、例えば、$f(y) = y^2 + 2y + 3$ のようにしても同じ関数 (写像) f を定義することになります。

注意　f が A から B への写像であることと、その写像 f が定義できることとは別の概念です。A が無限集合で、B が複数の要素を持つ場合、A の要素 x に対応する B の要素 $f(x)$ をどのような (数式や論理式を含む) 文章でも定義できないような写像が存在します。例えば、自然数全体 $\mathbb{N}$ から自然数全体 $\mathbb{N}$ への写像 (関数) の中には、x に対して $f(x)$ が定義できないようなものが含まれています。

メモ

6.3　関係

集合 A の要素と集合 B 要素の対応の仕方を「A と B の間の**二項関係**」、あるいは「A と B の間の**関係**」と呼びます。写像は一定の条件を満たすような対応の仕方ですから、写像も二項関係の一種となります。6–2 ページの図 1 や図 2 の例は、どれも A と B の間の二項関係になります。

R が A と B の間の二項関係であるとき、A の要素 x と B の要素 y が R によって対応していることを次のように書き表します。

$$x\,R\,y$$

注意　$A = B$ の場合でも、$x\,R\,y$ であるからといって、$y\,R\,x$ とは限りません。

注意　「A と A の間の二項関係」のことを「A 上の二項関係」と呼びます。例えば、$x < y$ が成り立つような 2 つの実数 x と y の対応は $\mathbb{R}$ 上の二項関係の 1 つです。「$x < y$」を $x = y$ や $x \fallingdotseq y$、$x \leqq y$、$x > y$、$x \geqq y$ としてもそうなりますし、$x^2 + y^2 = 1$ が成り立つような実数 x と y の対応も、やはり $\mathbb{R}$ 上の二項関係の 1 つです。同様に、「y は x の倍数である」が成り立つような整数 x と y の間の対応は $\mathbb{Z}$ 上の二項関係の 1 つとなります。

関係と述語　集合 A と B の間の二項関係 R は、次のように定義される二項述語と考えることができます。

$$R(x,\, y) \iff x\,R\,y$$

逆に、集合 A の要素 x と集合 B の要素 y に関する述語 R、つまり、

$$\forall x.\, \forall y.\, R(x,\, y) \Rightarrow x \in A \land y \in B$$

が成り立つような述語 R は、A と B の間の二項関係とみなすことができます。

メモ

直積集合の部分集合としての二項関係　直積集合 $A \times B$ の部分集合 R は、

$$\langle x,\, y\rangle \in R \quad \Longleftrightarrow \quad x\, R\, y$$

とみなすことで、A と B の間の二項関係を表わしていると考えることができます。つまり、直積 $A \times B$ の部分集合は、何らかの関係にある $x \in A$ と $y \in B$ の組 (順序対) をすべて集めたものと考えることができます。

例えば、$A = \{\, 1,\, 2,\, 3 \,\}$、$B = \{\, 1,\, 2 \,\}$ のとき、

$$\{\, \langle 1,\, 1\rangle,\, \langle 1,\, 2\rangle,\, \langle 2,\, 2\rangle \,\} \qquad や \qquad \{\, \langle 1,\, 2\rangle,\, \langle 2,\, 1\rangle,\, \langle 3,\, 1\rangle,\, \langle 3,\, 2\rangle \,\}$$

は、A と B の間の二項関係を表します。この A と B の場合、A と B の間の二項関係は、空集合や $A \times B$ 自身を含めて、$2^{(3\times 2)} = 2^6 = 64$ 通りあります。

注意　直積 $A \times B$ の部分集合は、それぞれ A と B の間の二項関係を表しますので、A と B がどちらも有限集合である場合、A と B の間の二項関係は、$\mathcal{P}(A \times B)$ の要素の数だけ存在することになります。A と B の要素の個数がそれぞれ a 個と b 個なら、直積 $A \times B$ の要素は $a \times b$ 個ありますので、A と B の間の二項関係は、$2^{a\times b}$ 通り存在することになります。

メモ

多項関係　この考え方を一般化して、集合 R が、n 個の集合の直積 $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ の部分集合であるとき、R を「集合 A_1、A_2、A_3、$\ldots$、A_n の間の n 項関係」と呼びます。対応が有限個 (要素の数が有限個) に限られる n 項関係は次のような表に相当すると考えることができます[6]。

A_1	A_2	A_3	$\ldots$	A_n
x_{11}	x_{12}	x_{13}	$\cdots$	x_{1n}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	$\cdots$	x_{2n}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	$\cdots$	x_{3n}
x_{41}	x_{42}	x_{43}	$\cdots$	x_{4n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	$\cdots$	x_{mn}

ただし、$\forall i \in \{\, 1,\, 2,\, \ldots,\, m \,\}.\, \forall j \in \{\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n \,\}.\, x_{ij} \in A_j$ です。

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 6 回・終わり

[6] データの集まりをこのような表と考えて扱うデータベースを「関係データベース」と呼びます。