集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 5 回

2022 年 10 月 28 日

今回の内容

5.1　述語論理

例えば、実数の性質について議論を行う場合を考えてみると、そこでは、実数を表わす変数 x、y、$\ldots$ や定数 0、1、-1.508、e、π、$\ldots$、実数に対して実数を対応づける関数 log、sin、cos、$\ldots$ などが登場し、これらを組み合わせて実数を書き表し、その性質が議論されます。関数については、ここに挙げたような具体的な関数ではなくて、関数 f、g、$\ldots$ のように、何らかの関数を表す記号を使用することもあります。また、$x+y$ で、x と y の和を表しますが、これは、$+$ という 2 項関数[1]があって、$x+y$ は $+(x,\,y)$ のこととみなせば、$+$ も関数として登場していると考えることができます。同様に、x^y も、べき乗の計算を行う 2 項関数 pow があって、その関数を使った $\mathrm{pow}(x,\,y)$ の略記法とみなすことができます。

また、実数の性質としては、「x は負である」、「y は有理数である」、「z は方程式 $x^2-1=0$ の解である」というような、1 つの実数に関する条件が登場することもあれば、「x は y より小さい」や「x と y は $x^2+y^2=1$ を満たす」のように、複数の実数の組に関する条件が議論されることがあります。

以上は、実数のような数学的な対象に関する議論の例ですが、そうでない場合も同様です。例えば、「x の父親が y で、y と z は兄妹で、さらに w の母親が z なら、w と x はいとこ同士である」と言うような命題では、w、x、y、z が (人を表わす) 変数として登場していて、人に対して、その父親を対応づける関数やその母親を対応づける関数、さらに、「... と ... が兄妹の関係である」や「... と ... はいとこ同士である」といった、2 人の人に関する条件が登場しています。

メモ

個体変数、個体定数、関数　ある集合 D の要素を「対象」とした議論をしているとき、その D の要素は (先の例で見たように) 変数や定数、関数 (に相当するもの) を組み合せて書き表されます。このとき、D の要素を表わす変数や定数は、命題変数や命題定数 ($\top$ と $\bot$) と区別するために、それ

[1] 2 つの値の組に対して 1 つの値を対応させる関数を「2 項関数」あるいは「2 引数関数」、「2 変数関数」などと呼びます。

それ、「個体変数」、「個体定数」と呼ぶことがあります。この科目では、英小文字 x、y、z、... を個体変数として使用します。

述語　空でないある集合 D の要素を「対象」とした議論をしているとき、D の要素に関する条件を「**述語**」と呼びます[2]。例えば、実数に関する「... は有理数である」という条件や、人に関する「... と ... は兄妹の関係である」といった条件が「述語」[3]となります。

この科目では、述語を P、Q、R、... で書き表し、それぞれの条件が「x について成り立つ」という命題を $P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$ にように書き表すことにします。例えば、

$$P(x) \ = \ x \text{ は有理数}$$

のように述語 P が定義されていれば、$P\left(\dfrac{1}{3}\right)$ という命題は真で、$P\left(\sqrt{2}\right)$ は偽となります。この例の P は 1 つの対象 ($\mathbb{R}$ の 1 つの要素) に関する条件でしたが、例えば、

$$P(x,\, y) \ = \ (x < y)$$

のように、複数の対象に関する条件に相当する述語を考えることもできます。

「述語」は、D の 1 つの要素、あるいは、いくつかの要素の組に対して、それぞれ「1 (真)」あるいは「0 (偽)」を対応させる関数のようなものと考えることができます。

メモ

述語論理　命題論理では、それが具体的にどのような命題であるのかは無視し、その真偽のみに注目して、命題の間の関係を調べましたが、命題をさらに「述語」と「対象」に分解して、命題や述語、対象の間の関係を調べるものを「**述語論理**」と呼びます。命題論理でそうであったように、述語論理においても個々の述語がどのように定義されているのかは無視して、述語を、単に対象 (の組) への「1 (真)」あるいは「0 (偽)」の対応のさせかたであるとしかみなしません。

メモ

[2]「述語」という言葉は、日本語や英語などの自然言語の文法用語になぞらえたものですが、文法用語における意味とは一致しませんので注意してください。

[3]ここでは、x を「主語」とみなしています。

5.2　全称量化子と存在量化子

変数 x に応じて真偽が定まる命題 $A(x)$[4]があったとき、$A(x)$ が成り立つ x がどのくらいあるかに関する議論をしたくなるときがあります。ある集合 D の要素を「対象」として物事を考えているとき[5]、基本となるのが、

　　D のすべての要素 x について $A(x)$

や

　　D のある要素 x について $A(x)$

などの命題です。このように、D の要素 x に応じて真偽が定まる命題 $A(x)$ があったとき、$A(x)$ を真とする x の「量」についての命題を作る働きのあるものを「**量化子**」あるいは「**限量子**」と呼びます。

メモ

全称量化子　変数 x に応じて真偽が定まる論理式 $A(x)$ に対して「すべての x について $A(x)$」[6]を意味する命題をつくる量化子を「**全称量化子**」と呼び、全称量化子によってできた命題を

$$\forall x\, A(x) \quad \text{や} \quad \forall x.\, A(x)$$

という論理式で書き表します。ここで使われている $\forall$ という記号は「**全称記号**」と呼ばれます。

注意　$\forall x\, A(x)$ の書き方をした場合、$\forall x$ は、論理演算子 $\neg$ と同じくらい強く $A(x)$ に結び付くものとみなします。例えば、$\forall x\, A(x) \land B$ と書くと、$(\forall x\, A(x)) \land B$ を意味します。また、$\forall x\, A(x)$ は、$(\forall x)\, A(x)$ のように書かれることもあります。

注意　一方、$\forall x.\, A(x)$ の「.」は、「. より右の式をできるだけ大きく括弧で囲みなさい」ということを表しており[7]、例えば、$\forall x.\, A(x) \Rightarrow B \lor C$ という論理式は $\forall x\, (A(x) \Rightarrow B \lor C)$ の意味となり、$(\forall x\, A(x)) \Rightarrow B \lor C$ とは解釈しません。

注意　議論の対象としている範囲 (つまり、x の動く範囲) が、あらかじめ明確になっている場合は省略されますが、そうでない場合は、

$$\forall x \in D.\, A(x)$$

[4]これは、$A(x)$ が「述語」の働きをしていることに他なりません。

[5]D は空集合でないものとします。

[6]「任意の x について $A(x)$」と言っても同じ意味です。

[7]文末を示す「.」と区別するために、大きめの点「∎」を用いることもあります。

のように書かれることもあります。これは、

$$\forall x\,(x \in D \Rightarrow A(x))$$

と書くのと同じ意味です。

メモ

存在量化子　変数 x に応じて真偽が定まる論理式 $A(x)$ があったとき、「ある x について $A(x)$」[8] という命題をつくる量化子を「**存在量化子**」と呼び、存在量化子によってできた命題を

$$\exists x\, A(x) \quad \text{や} \quad \exists x.\, A(x)$$

という論理式で書き表します。この ∃ という記号は「**存在記号**」と呼ばれます。

注意　$\exists x$ と $A(x)$ との結び付きの優先度や $\exists x.A(x)$ での暗黙の括弧、また、$(\exists x)\,A(x)$ のような書き方がされることがあるのも全称記号の場合と同様です。

注意　存在記号の場合も、議論の対象としている範囲 (つまり、x が存在する範囲) が、あらかじめ明確になっている場合は省略されますが、そうでない場合は、

$$\exists x \in D.\, A(x)$$

のように書かれることもあります。これは、

$$\exists x\,(x \in D \land A(x))$$

と書くのと同じ意味になります。全称記号の場合とは異なりますので注意してください。

メモ

[8]「$A(x)$ であるような x が存在する」と言っても同じ意味です。

5.3 自由変数と束縛変数

「すべての x について $A(x)$」という命題と「すべての y について $A(y)$」という命題は基本的には同じ意味となります。これを論理式の間の関係で表わすと、

$$\forall x\, A(x) \iff \forall y\, A(y)$$

ということになります。同様に、$\exists x\, A(x) \iff \exists y\, A(y)$ です。このように全称量化子や存在量化子で使われる変数は、別の変数に置き換えることができますが、置き換える先の変数によっては論理式の意味が変わってしまうことがあるので注意が必要です。

例えば、x や y が実数で、$A(x) = (y < x)$ であるとき、$\exists x\, A(x)$ という論理式は $\exists x\, (y < x)$ となり、「y より大きな実数 x が存在する」を意味します。ところが、これを機械的に $\exists y\, (y < y)$ と書き換えてしまうと全く違った意味の論理式となってしまいます。

メモ

論理式の自由変数　論理式 A のある場所に変数 x が現われていて、その場所が、x に関する量化子 ($\forall x$ や $\exists x$) で囲まれていないとき、その場所の x を、論理式 A の中の「**自由な出現**」と言います[9]。また、論理式 A に自由に出現している変数を、A の「**自由変数**」と呼びます。

例えば、次の論理式中で下線を引いた場所の変数の出現はすべて自由な出現です。この論理式の自由変数は x、y、z の 3 つとなります。

$$\exists x\, (P(x) \land Q(\underline{y},\, \underline{z})) \Rightarrow \forall w\, \exists y\, R(\underline{x},\, y,\, w)$$

これまで、論理式 A の真偽が変数 x に応じて定まることを $A(x)$ のように書き表してきましたが、これは、論理式 A の中に変数 x が「**自由に**」現われていることに他なりません。

量化子の束縛変数　一方、論理式 A のある場所に変数 x が現われていて、その場所が、x に関する量化子で囲まれているとき、その場所の x を、論理式 A の中の「**束縛された出現**」と言います。また、量化子 $\forall x$ や $\exists x$ の x に使われている変数 x を、この量化子の「**束縛変数**」と呼びます。

例えば、次の論理式中で下線を引いた場所の変数の出現はすべて束縛された出現です。

$$\exists x\, (P(\underline{x}) \land Q(y,\, z)) \Rightarrow \forall w\, \exists y\, R(x,\, \underline{y},\, \underline{w})$$

束縛変数の置き換え　量化子が使われている $\forall x\, A$ や $\exists x\, A$ の形の論理式は、次のルールに従う限りは、量化子の束縛変数 x と A 中の x の自由な出現を (同時に) 別の変数に置き換えても意味は変わりません。

[9] 量化子 $\forall x$ や $\exists x$ そのものの中の x は自由な出現とは見なしません。

(a) A の自由変数に置き換えない。

(b) A の中で x が出現している場所に置くと、束縛された出現となってしまう変数には置き換えない。

例えば、$\forall x\,(y < x)$ の量化子 $\forall x$ の束縛変数 x を y に置き換えるのは (a) のルールに違反しますので、この論理式を $\forall y\,(y < y)$ と書き換えることはできません。また、$\exists x\,(P(x) \Rightarrow \forall z\,(y < x))$ の量化子 $\exists x$ の束縛変数 x を z に置き換えるのは (b) のルールに違反しますので、これを $\exists z\,(P(z) \Rightarrow \forall z\,(y < z))$ に書き換えることはできません。

注意　量化子の束縛変数は、数学で数列などの総和を表わす $\sum_{i=1}^{n} f(i,\,j)$ の i と同じ立場の変数だと考えることができます。ルールの (a) は $\sum_{i=1}^{n} f(i,\,j)$ の i を j に置き換えて、$\sum_{j=1}^{n} f(j,\,j)$ としてはいけないことを意味します。また、ルールの (b) は $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(i,\,j)$ の i を j に置き換えて、$\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(j,\,j)$ としてはいけないことを意味しています。

注意　量化子の束縛変数を、どこにも使われていないような新しい変数に置き換えるのはいつでもできます。

メモ

5.4　全称記号や存在記号を含む論理式の性質

対象全体の集合 D が有限集合 $\{\, d_1,\, d_2,\, d_3,\, \ldots,\, d_n \,\}$ である場合、$\forall x\, A(x)$ の意味は

$$A(d_1) \wedge A(d_2) \wedge A(d_3) \wedge \ldots \wedge A(d_n)$$

と同じになります。同様に、$\exists x\, A(x)$ は

$$A(d_1) \vee A(d_2) \vee A(d_3) \vee \ldots \vee A(d_n)$$

と考えることができます。よって、このとき、以下が成立します。

$$\begin{aligned}
&\forall x\,(A(x) \wedge B(x))\\
&\qquad \Longleftrightarrow (A(d_1) \wedge B(d_1)) \wedge (A(d_2) \wedge B(d_2)) \wedge (A(d_3) \wedge B(d_3)) \wedge \ldots \wedge (A(d_n) \wedge B(d_n))\\
&\qquad \Longleftrightarrow (A(d_1) \wedge A(d_2) \wedge A(d_3) \wedge \ldots \wedge (A(d_n)) \wedge (B(d_1)) \wedge B(d_2)) \wedge B(d_3)) \wedge \ldots \wedge B(d_n)))\\
&\qquad \Longleftrightarrow (\forall x\, A(x)) \wedge (\forall x\, B(x))\\
&\exists x\,(A(x) \vee B(x))\\
&\qquad \Longleftrightarrow (A(d_1) \vee B(d_1)) \vee (A(d_2) \vee B(d_2)) \vee (A(d_3) \vee B(d_3)) \vee \ldots \vee (A(d_n) \vee B(d_n))
\end{aligned}$$

$$\iff (A(d_1) \vee A(d_2) \vee A(d_3) \vee \ldots \vee (A(d_n)) \vee (B(d_1)) \vee B(d_2)) \vee B(d_3)) \vee \ldots \vee B(d_n)))$$
$$\iff (\exists x\, A(x)) \vee (\exists x\, B(x))$$

対象全体 D が無限集合の場合でも、$\forall x\, A(x)$ は無限個の論理積、$\exists x\, A(x)$ は無限個の論理和に相当し、一般的に、次の性質が成立します。

$$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \iff (\forall x\, A(x)) \wedge (\forall x\, B(x))$$
$$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \iff (\exists x\, A(x)) \vee (\exists x\, B(x))$$

また、同様に、次の性質が成立します。

$$\forall x\, \forall y\, A(x,\, y) \iff \forall y\, \forall x\, A(x,\, y)$$
$$\exists x\, \exists y\, A(x,\, y) \iff \exists y\, \exists x\, A(x,\, y)$$

注意　全称量化子や存在量化子が使用される場合、議論の対象全体の集合 D は複数の要素から構成されているのが普通です。このようなときには、$\exists x \forall y A(x,\, y)$ と $\forall y \exists x A(x,\, y)$ は同値ではありません。$\exists x \forall y A(x,\, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,\, y)$ は $A(x,\, y)$ に関わらず真ですが、$\forall y \exists x A(x,\, y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,\, y)$ はそうであるとは限りません。例えば、x や y を実数とするとき、$\forall y\, \exists x\, (x > y)$ は真ですが、$\exists x\, \forall y\, (x > y)$ は偽です。

注意　同様に、対象全体が複数の要素からなるとき、$\forall x\, (A(x) \vee B(x))$ と $(\forall x\, A(x)) \vee (\forall x\, B(x))$ は同値とは限りません。$(\forall x\, A(x)) \vee (\forall x\, B(x)) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$ は $A(x)$ や $B(x)$ に関わらず真ですが、$\forall x\, (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x\, A(x)) \vee (\forall x\, B(x))$ はそうではありません。例えば、x を自然数とし、述語 P、Q を

$$P(x) = x \text{ は偶数}$$
$$Q(x) = x \text{ は奇数}$$

と定義すると、$\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$ は真ですが、$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$ は偽となります。

注意　同様に、対象全体が複数の要素からなるとき、$\exists x\, (A(x) \wedge B(x))$ と $(\exists x\, A(x)) \wedge (\exists x\, B(x))$ も同値とは限りません。$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x\, A(x)) \wedge (\exists x\, B(x))$ は $A(x)$ や $B(x)$ に関わらず真ですが、$(\exists x\, A(x)) \wedge (\exists x\, B(x)) \Rightarrow \exists x\, (A(x) \wedge B(x))$ はそうではありません。

メモ

ド・モルガン律　対象全体 D が有限集合 $\{ d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n \}$ であれば、(命題論理の) ド・モルガン律を適用すると

$$\begin{aligned} \neg \forall x \, A(x) &\iff \neg(A(d_1) \wedge A(d_2) \wedge A(d_3) \wedge \ldots \wedge A(d_n)) \\ &\iff \neg A(d_1) \vee \neg A(d_2) \vee \neg A(d_3) \vee \ldots \vee \neg A(d_n)) \\ &\iff \exists x \ \neg A(x) \end{aligned}$$

となることが分かりますが、これは、対象全体 D が無限集合の場合でも成立し、一般的に、

$$\neg \forall x \, A(x) \iff \exists x \neg A(x)$$

が成り立ちます。同様に

$$\neg \exists x \, A(x) \iff \forall x \neg A(x)$$

も成立します。これらの性質も (命題論理の場合と同じく) **ド・モルガン律**と呼ばれます。

メモ

5.5　一意存在量化子

存在量化子によく似た量化子として、x を含む命題 $A(x)$ から、

　　D のただ 1 つの要素に対して $A(x)$

という命題を作るものがあります。この量化子は「一意存在量化子」と呼ばれ、論理式で表すときは、この命題を

$$\exists! x \, A(x) \quad や \quad \exists! x. \, A(x)$$

のように書いて表します[10]。対象 x と y が同一であることを $x = y$ で表すと、$\exists! x \, A(x)$ は

$$\exists x \, (A(x) \wedge \forall y \, (A(y) \Rightarrow y = x))$$

と同値です。

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 5 回・終わり

[10] $\exists!$ の代りに $\exists 1$ を用いることもあります。