集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 4 回

2022 年 10 月 21 日

今回の内容

4.1 命題と集合との対応

命題の世界と集合の世界に関する次の表のような対応を考えると、これらの世界で共通に成立する性質があります。ただし、以下で U は全体集合を表すことにします。

命題と論理演算	集合と集合演算
$\wedge$ (論理積)	$\cap$ (共通集合)
$\vee$ (論理和)	$\cup$ (和集合)
$\perp$ (偽)	$\{\}$ (空集合)
$\top$ (真)	U (全体集合)
$\neg$ (否定)	$\overline{}$ (補集合)

論理演算や集合演算に関する性質

交換律	$A \wedge B \iff B \wedge A$	$A \vee B \iff B \vee A$
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
結合律	$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
分配律	$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
吸収律	$A \wedge (A \vee B) \iff A$	$A \vee (A \wedge B) \iff A$
	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
相補律	$A \wedge \neg A \iff \perp$	$A \vee \neg A \iff \top$
	$A \cap \overline{A} = \{\}$	$A \cup \overline{A} = U$
べき等律	$A \wedge A \iff A$	$A \vee A \iff A$
	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
ド・モルガン律	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$
	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
二重否定律	$\neg\neg A \iff A$	
	$\overline{\overline{A}} = A$	

真と偽、全体集合と空集合に関する性質

$\neg\top \iff \bot$	$\neg\bot \iff \top$	$A\wedge\bot \iff \bot$	$A\vee\top \iff \top$	$A\wedge\top \iff A$	$A\vee\bot \iff A$
$\overline{U} \iff \{\}$	$\overline{\{\}} = U$	$A\cap\{\} = \{\}$	$A\cup U = U$	$A\cap U = A$	$A\cup\{\} = A$

メモ

その他の性質　以下の性質も知っておくと便利に使えます[1]。

$$A\wedge(\neg A\vee B) \iff A\wedge B \qquad A\vee(\neg A\wedge B) \iff A\vee B$$
$$\neg A\wedge(A\vee B) \iff \neg A\wedge B \qquad \neg A\vee(A\wedge B) \iff \neg A\vee B$$

$$A\cap(\overline{A}\cup B) = A\cap B \qquad A\cup(\overline{A}\cap B) = A\cup B$$
$$\overline{A}\cap(A\cup B) = \overline{A}\cap B \qquad \overline{A}\cup(A\cap B) = \overline{A}\cup B$$

これらは、これまでに紹介した性質から導くことができます。例えば、$A\wedge(\neg A\vee B) \iff A\wedge B$ は次のように導くことができます。

$$\begin{aligned} A\wedge(\neg A\vee B) &\iff (A\wedge\neg A)\vee(A\wedge B) \qquad (\text{分配律}) \\ &\iff \bot\vee(A\wedge B) \\ &\iff A\wedge B \end{aligned}$$

双対性　ここまで紹介してきた性質をよく見てみると、論理演算では、$\wedge$ と $\vee$、$\top$ と $\bot$ を同時に、集合演算では、$\cap$ と $\cup$、U と $\{\}$ を同時に、それぞれ相互に置き換えても同じ性質が成立していることに気づきます。これを論理演算 $\wedge$、$\vee$ や集合演算 $\cap$、$\cup$ の「**双対性**」[2]と呼びます。

メモ

[1] $\iff$ や $=$ の左辺の形が「吸収律」と似ていることに注意してください。

[2]「相対性」と区別するために「双対性」は「そういついせい」と読みます。

4.2　論理演算の性質を使った論証

前節で紹介した論理演算の性質を利用すると、例えば、第１回の論理パズル「犯人探し」を解くことができます。与えられた (a) ～ (e) の前提を論理式で表すと右のようになりましたが、(b) ～ (e) の $\Rightarrow$ を $\vee$ と $\neg$ で置き換えた上で論理式を書き換えると以下のようになります。

(a) $W \vee X \vee Y \vee Z$

(b) $\neg W \Rightarrow \neg Y$

(c) $W \vee X \Rightarrow Y \vee Z$

(d) $W \Rightarrow \neg X \wedge \neg Y$

(e) $Z \Rightarrow W \vee Y$

$$
\begin{aligned}
\neg W \Rightarrow \neg Y &\iff \neg\neg W \vee \neg Y \\
&\iff W \vee \neg Y && \text{(二重否定律)} \\
W \vee X \Rightarrow Y \vee Z &\iff \neg(W \vee X) \vee Y \vee Z \\
&\iff (\neg W \wedge \neg X) \vee Y \vee Z && \text{(ド・モルガン律)} \\
&\iff (\neg W \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) && \text{(分配律)} \\
W \Rightarrow \neg X \wedge \neg Y &\iff \neg W \vee (\neg X \wedge \neg Y) \\
Z \Rightarrow W \vee Y &\iff \neg Z \vee (W \vee Y)
\end{aligned}
$$

以下、$\wedge$ や $\vee$ に関する交換律と結合律は特に断りなく使用することにすると、与えられた前提は

$$
\begin{aligned}
&(W \vee X \vee Y \vee Z) \wedge (W \vee \neg Y) \\
&\quad \wedge (\neg W \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg W \vee \neg X \wedge \neg Y) \wedge (W \vee Y \vee \neg Z)
\end{aligned}
$$

となり、分配法則を使って W と $\neg W$ をそれぞれ１つにまとめると、

$$
\begin{aligned}
\iff\ & (W \vee ((X \vee Y \vee Z) \wedge \neg Y \wedge (Y \vee \neg Z))) \\
&\quad \wedge (\neg W \vee ((Y \vee Z) \wedge \neg X \wedge \neg Y)) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z)
\end{aligned}
$$

さらに、「その他の性質」で紹介した $\neg A \wedge (A \vee B) \iff \neg A \wedge B$ を利用すると、

$$
\begin{aligned}
\iff\ & (W \vee ((X \vee Z) \wedge \neg Y \wedge \neg Z)) \wedge (\neg W \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \\
\iff\ & (W \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)) \wedge (\neg W \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z)
\end{aligned}
$$

分配律とべき等律より、

$$
\begin{aligned}
\iff\ & ((W \wedge \neg W) \vee (W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \\
&\qquad \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge \neg W) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge \neg X \wedge Z)) \\
&\wedge (\neg X \vee Y \vee Z)
\end{aligned}
$$

$A \wedge \neg A \iff \bot$ と $A \wedge \bot \iff \bot$、$A \vee \bot \iff A$ を使うと、

$$
\iff\ ((W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg W \wedge X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z)
$$

分配律より、

$$
\begin{aligned}
\iff\ & (W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge Z \wedge \neg X) \vee (W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge Z \wedge Y) \\
& \vee (W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge Z \wedge Z) \vee (\neg W \wedge X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge \neg X) \\
& \vee (\neg W \wedge X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge Y) \vee (\neg W \wedge X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge Z)
\end{aligned}
$$

さらに、べき等律と $A \wedge \neg A \Longleftrightarrow \bot$、$A \wedge \bot \Longleftrightarrow \bot$、$A \vee \bot \Longleftrightarrow A$ を使うと、

$$\Longleftrightarrow \quad W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge Z$$

以上で、第 2 回に行った論証と同じ結果を導くことができました。

メモ

4.3 論理式の簡単化

このように、前提を論理式で表現し、これを同値な論理式に書き換えていくことで、結論を導けることがあります。結論まで至れない場合でも、複雑な命題 (論理式) をより簡単な命題 (論理式) に変形することで、論証の見通しがよくなる場合があります。

論理式を簡単化するのに、どこから手をつけていいか分からないときは、以下のような方針で論理式を書き換えましょう。ただし、この中で、交換律や結合律、分配律は必要に応じて適宜使うものとします。

1. $A \Rightarrow B$ の形の論理式を、$\neg A \vee B$ に置き換える。
2. $\neg\neg A$、$A \wedge \neg A$、$A \vee \neg A$ の形の論理式は、それぞれ A、$\bot$、$\top$ に置き換える。
3. $A \wedge \top$、$A \vee \bot$、$A \wedge \bot$、$A \vee \top$ の形の論理式は、それぞれ A、A、$\bot$、$\top$ に置き換える。
4. $\neg(A \wedge B)$、$\neg(A \vee B)$ の形の論理式は、ド・モルガン律を使って、それぞれ $\neg A \vee \neg B$、$\neg A \wedge \neg B$ に置き換える。
5. 同じ変数 (同じ形の論理式) を、分配律などを使って、同じ場所に集めることを考える。
6. $A \wedge (A \vee B)$、$A \vee (A \wedge B)$ の形の論理式を、吸収律を使って、A に置き換える。
7. $A \wedge (\neg A \vee B)$、$\neg A \wedge (A \vee B)$、$A \vee (\neg A \wedge B)$、$\neg A \vee (A \wedge B)$ の形の論理式を、それぞれ $A \wedge B$、$\neg A \wedge B$、$A \vee B$、$\neg A \vee B$ に置き換える。

メモ

4.4　集合を表す式の簡単化

論理演算と集合演算で共通して成立する性質を利用すると、同じ方針で集合を表す式を簡単化することもできます。ここでも、交換律や結合律、分配律は必要に応じて適宜使うものとします。また、全体集合を U とします。

1. $\overline{\overline{A}}$、$A\cap\overline{A}$、$A\cup\overline{A}$ の形の論理式は、それぞれ A、$\{\}$、U に置き換える。
2. $A\cap U$、$A\cup\{\}$、$A\cap\{\}$、$A\cup U$ の形の論理式は、それぞれ A、A、$\{\}$、U に置き換える。
3. $\overline{A\cap B}$、$\overline{A\cup B}$ の形の論理式は、ド・モルガン律を使って、それぞれ $\overline{A}\cup\overline{B}$、$\overline{A}\cap\overline{B}$ に置き換える。
4. 同じ集合 (同じ式) を、分配律などを使って、同じ場所に集めることを考える。
5. $A\cap(A\cup B)$、$A\cup(A\cap B)$ の形の論理式を、吸収律を使って、A に置き換える。
6. $A\cap(\overline{A}\cup B)$、$\overline{A}\cap(A\cup B)$、$A\cup(\overline{A}\cap B)$、$\overline{A}\cup(A\cap B)$ の形の論理式を、それぞれ $A\cap B$、$\overline{A}\cap B$、$A\cup B$、$\overline{A}\cup B$ に置き換える。

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 4 回・終わり