集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 3 回

2022 年 10 月 14 日

今回の内容

3.1　集合

「2022 年度の『集合と論理』の履修登録者全体」や「10 以上 100 未満の素数の集まり」など、その範囲が明確に定まっている「ものの集まり」のことを「**集合**」と呼びます。集合を構成している 1 つ 1 つのものを、その集合の「**要素**」あるいは「**元**(げん)」と呼びます。x が集合 S の要素であることを「x は S に**属する**」と言い表し、これを

$$x \in S$$

や $S \ni x$ で書き表します。また、x が集合 S の**要素でない**ことを、$x \notin S$ や $S \not\ni x$ で書き表します。

集合の等しさ　集合 A のすべての要素が集合 B に属していて、かつ、集合 B のすべての要素が集合 A に属しているとき、2 つの集合 A、B は**等しい**とみなし、これを $A = B$ と書き表します。

空集合　要素を一つも持たない集合を「**空集合**」と呼び、$\{\,\}$ あるいは $\varnothing$ で書き表します。

有限集合と無限集合　要素の個数が有限である集合を「**有限集合**」と呼び、そうでないものを「**無限集合**」と呼びます[1]。

メモ

部分集合　集合 A のすべての要素が集合 B に属するとき、A は B の「**部分集合**」であると言い、

$$A \subset B$$

あるいは $B \supset A$ と書き表します[2]。$A = B$ は、$A \subset B$ と $B \subset A$ がともに成り立つことと同値です。$A \subset B \wedge A \neq B$ であるとき、A は B の「**真部分集合**」であると言います。

A がどんな集合でも、空集合 $\{\,\}$ は A の部分集合となります。また、A は A 自身の部分集合です。つまり、A に関わらず、$A \subset A$ と $\{\,\} \subset A$ がともに成り立ちます。

[1] 空集合はもちろん有限集合の 1 つです。

[2] $A \subseteq B$ や $B \supseteq A$ と書き表すこともあります。また、$A \subset B$ であるが $A = B$ ではないことを $A \subsetneq B$ と書き表すことがあります。

包含関係　$A \subset B$ であるとき、「B は A を含む」、あるいは、「B は A を包む」、「B は A を包含する」などと言います[3]。集合の間の「含む」、「含まれる」の関係を「**包含関係**」と呼びます。

メモ

3.2　集合を定義する方法

集合を定義する際に基本となるのは以下の 2 つの方法です。

外延的定義　その要素をすべて列挙することによる集合の定義を「外延的定義」と呼びます。このときよく用いられるのは、{ と } の間にその集合の要素を列挙して集合を書き表す方法です。例えば、

$$A = \{\, 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10 \,\}$$

のように集合 A を定義すると、A は「10 以下の正の偶数全体」の集合となります。厳密な定義とは言えませんが、読み手の常識で補ってもらうことを期待して、例えば、「100 以下の正の偶数全体」の集合を定義するのに

$$A = \{\, 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 98,\ 100 \,\}$$

のように ... を使うこともあります。

内包的定義　その要素が満たすべき条件を示すことで集合を定義することもできます。このような定義を「内包的定義」と呼びます。通常、{ } の中に、その集合の要素の代表と、その代表が満たすべき条件の 2 つを縦線「 | 」で区切って書いて集合を定義します[4]。

例えば、「10 以下の正の偶数全体」の集合 A を

$$A = \{\, n \mid 0 < n \leqq 10、かつ、n \text{ は } 2 \text{ の倍数} \,\}$$

のように定義します[5]。定義したい集合 A が、すでに定義済みの集合 B の部分集合となる場合は、

$$A = \{\, x \in B \mid x \text{ が満たすべき条件} \,\}$$

のように、A の要素が B に属するという条件を縦線「 | 」の左に書くこともよく行なわれます。

メモ

[3]もちろん、同じことを「A は B に含 (包) まれる」、あるいは、「A は B に包含される」と言ったりもします。

[4]縦線「 | 」の代わりにコロン「 : 」が使われることもあります。

[5]同じ集合を $A = \{\, 2n \mid n \text{ は } 0 < n \leqq 5 \text{ を満たす整数} \,\}$ のように定義しても同じです。

数学でよく使われる集合を表す記号　数学では実数全体や複素数全体などの集合を次のような記号で表すことがよくあります[6]。

$\mathbb{N}$	自然数全体[7] $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	整数全体 $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	有理数全体
$\mathbb{R}$	実数全体
$\mathbb{C}$	複素数全体

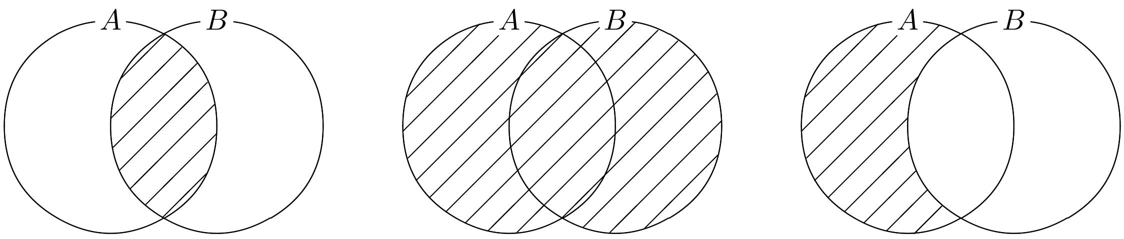
3.3　集合の演算

集合を扱う際には、「**共通集合**」、「**和集合**」、「**差集合**」、「**補集合**」、「**べき集合**」と呼ばれるものがよく登場します。これらを使うことで、すでに定義されている集合から新しい集合を定義することもできます。

共通集合、和集合、差集合　2 つの集合の間の代表的な演算として次の 3 つがあります。

共通部分	$A \cap B$	(A と B の両方に属するもの全体)
和集合	$A \cup B$	(A と B の少なくとも一方に属するもの全体)
差集合	$A - B$	(A には属し、B には属しないもの全体)[8]

A と B の共通部分 $A \cap B$ を「A と B の「**交わり**」、A と B の和集合 $A \cup B$ を「A と B の「**結び**」と呼ぶことがあります[9]。これら 3 つの演算の結果は、下のベン (Venn) 図の斜線部分となります。



$A \cap B$　共通部分　　$A \cup B$　和集合　　$A - B$　差集合

メモ

[6] これらの英大文字の書体は、黒板で太字であることを判別しやすくするための書き方に由来しています。書籍等では単なる太字の書体 **N**、**Z**、**Q**、**R**、**C** で書かれることもよくあります。

[7] 0 を $\mathbb{N}$ に含める場合もあります。

[8] 差集合 $A - B$ を $A \setminus B$ と書くこともあります。

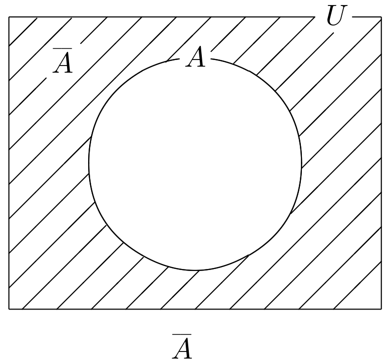
[9] 和集合や共通部分を取る演算を表す $\cup$ や $\cap$ の記号は、それぞれ、「カップ (cup)」と「キャップ (cap)」と呼ばれます。$\cup$ と $\cap$ が入り交じった演算が行われる際には、例えば、$A \cap (B \cup C)$ や $A \cup (B \cap C)$ のように括弧を使って演算の順序を指定しなければなりません。

全体集合と補集合　ある集合の要素だけを対象に、ものの性質を考えることがよくあります。例えば、

$$x \leqq y \text{ かつ } y \leqq z \text{ ならば } x \leqq z$$

という性質を考えているとき、x、y、z は実数 ($\mathbb{R}$ の要素) であることを前提にしている、といった具合です。このような「考える対象となるもの全体」となっている集合を「**全体集合**」と呼びます。

全体集合が U であるとき、集合として考えるものは自然と U の部分集合となりますが、U の部分集合 A に対して、$U-A$ を、A の「**補集合**」と呼び、$\overline{A}$ で書き表します[10]。



補集合

べき集合　集合 A のすべての部分集合を集めてできる集合を「A の**べき集合**」と呼び、$\mathcal{P}(A)$ のように書き表します[11]。例えば、$A = \{\,0,\,1,\,2\,\}$ のとき、

$$\mathcal{P}(A) = \{\,\{\,\},\,\{\,0\,\},\,\{\,1\,\},\,\{\,2\,\},\,\{\,0,\,1\,\},\,\{\,0,\,2\,\},\,\{\,1,\,2\,\},\,\{\,0,\,1,\,2\,\}\,\}$$

となります。このように、A が n 個の要素からなる有限集合のとき、$\mathcal{P}(A)$ は 2^n 個の要素 (集合) からなる有限集合となります。

メモ

3.4　集合が関わる論証

集合が関わる論証を行う際には、次のような性質が利用できます。ただし、U は全体集合です。

$$\begin{array}{lcl}
A \subset B & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ ならば } x \in B \\
A = B & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ ならば } x \in B \text{ であり、かつ、} x \in B \text{ ならば } x \in A \\
x \in A \cap B & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ かつ } x \in B \\
x \in A \cup B & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ または } x \in B \\
x \in A - B & \Longleftrightarrow & x \in A \text{ かつ } x \notin B \\
x \in \overline{A} & \Longleftrightarrow & x \in U \text{ かつ } x \notin A \\
A \in \mathcal{P}(B) & \Longleftrightarrow & A \subset B
\end{array}$$

例えば、$A \subset B$ であることを論証したい場合は、前回解説した「含意の導入」という推論の規則を考えると、まず、$x \in A$ を仮定した上で、そこから $x \in B$ を導けばよいことになります。

[10] A の補集合を A^c と書き表わすこともあります。

[11] A のべき集合を 2^A と書き表わすこともあります。

付録: ラッセルのパラドクス

集合の内包的定義を行う際には注意が必要です。例えば、

$$\mathcal{R} = \{\, x \mid x \notin x \,\}$$

のように $\mathcal{R}$ を定義したとします。集合 $\mathcal{R}$ は

自分自身を要素として含まないもの全体

となりますが、このような定義を許してしまうと、以下のような矛盾が生じます。

(1) $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ と仮定する。
(2) 　すると、$\mathcal{R}$ の定義より、$\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$
(3) 　これは (1) に矛盾する。
(4) よって、(1) の仮定は否定され、$\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ である。
(5) すると、$\mathcal{R}$ の定義より、$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$
(6) これは、(4) に矛盾する。

このような集合 $\mathcal{R}$ の存在が矛盾を引き起こしてしまうことを「ラッセルのパラドクス (Russell's Paradox)」と呼びます[12]。B が集合である (集合と考えても問題のない) こと[13]がすでに分かっているのなら、その部分集合 A を

$$A = \{\, x \in B \mid x \text{ が満たすべき条件} \,\}$$

のように定義することは通常問題ありません。ラッセルのパラドクスは、「集合であるもの全体」と言った集合を考えることができない (困難である) ことを意味しています。

集合と論理 (集合と位相及び演習) ・第 3 回・終わり

[12]Russell は人名で、数学・論理学・哲学など広い分野で活躍した Bertrand Russell (1875 ～ 1970) を指します。

[13]これを厳密に定めて、集合やそこから生まれる数学について研究する分野は「集合論」と呼ばれています。