集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 2 回

2022 年 10 月 7 日

今回の内容

2.1　命題の論証

前回の配布資料の論理パズルの正答は「w と z が犯人で、x や y は犯人ではない」なのですが、この科目の目標は、いかに犯人を見つけるかということではなく、いかにして他人にこの答えを納得してもらうかという点です。

論証の例　前回のように、w、x、y、z の 4 人がそれぞれ犯人であるということを、4 つの命題変数 W、X、Y、Z で表現し、(a) ∼ (e) の 5 つの命題をそれぞれ右のような論理式で表すと、このパズルの答えを以下のように導くことができます。

(a) $W \vee X \vee Y \vee Z$

(b) $\neg W \Rightarrow \neg Y$

(c) $W \vee X \Rightarrow Y \vee Z$

(d) $W \Rightarrow \neg X \wedge \neg Y$

(e) $Z \Rightarrow W \vee Y$

(1) まず、Y と仮定する。
(2)　　すると、(b) の対偶 $Y \Rightarrow W$ より、W である。
(3)　　よって、(d) より、$\neg X \wedge \neg Y$。
(4)　　ゆえに、$\neg Y$ となり、(1) と矛盾する。
(5) よって、(1) の仮定は否定され、$\neg Y$ であることがわかる。
(6) 次に、X と仮定する。
(7)　　すると、$W \vee X$ なので、(c) より、$Y \vee Z$ である。
(8)　　ところが、(5) の $\neg Y$ より、Z となる。
(9)　　ゆえに、(e) より、$W \vee Y$。
(10)　　すると、(5) の $\neg Y$ より、W。
(11)　　よって、(d) より、$\neg X \wedge \neg Y$。
(12)　　つまり、$\neg X$ となり、(6) と矛盾する。
(13) よって、(6) の仮定は否定され、$\neg X$ であることがわかる。
(14) ここで、$\neg W$ と仮定する。
(15)　　すると、(5) より、$\neg W \wedge \neg Y$、つまり $\neg(W \vee Y)$。
(16)　　これと、(e) の対偶 $\neg(W \vee Y) \Rightarrow \neg Z$ より、$\neg Z$。
(17)　　(5)、(13)、(14)、(16) より、$\neg W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$。
(18)　　つまり $\neg(W \vee X \vee Y \vee Z)$ となり、(a) と矛盾する。
(19) よって、(14) の仮定は否定され、W であることがわかる。
(20) すると、(c) より、$Y \vee Z$。
(21) ゆえに、(5) の $\neg Y$ より、Z となる。
(22) 結局、(5)、(13)、(19)、(21) より、$W \wedge \neg X \wedge \neg Y \wedge Z$。
つまり、犯人は w と z であり、x や y は犯人ではない。

以上は、(a) ～ (e) の命題がすべて真であることを前提として、そこから $W \land \neg X \land \neg Y \land Z$ という結論を論理的に導いたものです。このような手続きを「**論証**」と呼びます。数学における「証明」も「論証」の一種です。

自分勝手に結論を導くのでは「論証」とは言えません。命題論理にしたがって「**論理的**」に結論を導出しなければなりません。どのような手順が「論理的」と言えるのかについては、後ほど考えることにします。

W	X	Y	Z	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1

論証と恒真性　(a) ～ (e) を前提として、そこから「論理的に」$W \land \neg X \land \neg Y \land Z$ という結論を導くことができている場合、

$$(a) \land (b) \land (c) \land (d) \land (e) \Rightarrow W \land \neg X \land \neg Y \land Z$$

という論理式は恒真となります。

右上の真理値表は、4 つの命題変数 W、X、Y、Z の値の組み合わせ対する 5 つの論理式 (a)、(b)、(c)、(d)、(e) の値を示したものです。(a) ～ (e) のすべての論理式が真となるのは、$(W,\ X,\ Y,\ Z) = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$ の場合のみであることが分かります。

一般に、A という前提[1]から、B を論理的に導くことができれば、$A \Rightarrow B$ という論理式は恒真となります。

メモ

2.2　推論の規則

論理的に正しい導出の仕方 (正しい推論のステップ) はたくさんありますが、重要なものを紹介します[2]。これらは「推論規則」や「導出規則」などと呼ばれます。これらの規則は、

すでに $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ のすべてが導出 (論証) できているのなら、
B を導いてよい (B が論証される)

という形をしています。このような推論の規則は

$$\frac{A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n}{B}$$

[1] 前提が複数ある場合は、それらの論理積を A と考えることができます。

[2] 今回紹介する推論規則の内、「Modus Ponens」、「含意の導入」、「否定の導入」、「否定の除去」、「矛盾の利用」、「両刀論法」、「その他の規則」と「背理法」さえあれば、すべての恒真な論理式を論証可能なことが知られています。

のように書いて表すことがよくあります。その推論の規則を使うする際に、すでに導かれてなければならない $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を、その規則の「**前提**」と呼び、そこから導くことのできる B を、その規則の「**帰結**」と呼びます。

Modus Ponens 最も基本的な推論の規則として Modus Ponens (モーダス・ポーネンス) と呼ばれるものがあります。Modus Ponens は、

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

と書き表すことのできる規則で、A と $A \Rightarrow B$ がすでに論証できているのであれば、そこから B が論証できるというものです。あまりにも当然と言える推論の進め方なので、普段、意識することはありませんが、1 ページの論証では、(2)、(3)、(7)、(9)、(11)、(16)、(20) において、この Modus Ponens が使われています。

メモ

同値な論理式への書き換え Modus Ponens の応用として、すでに論証されている論理式を、それと同値な論理式に置き換えるというものがあります。

$$\frac{A \quad A \Longleftrightarrow B}{B}$$

$A \Longleftrightarrow B$ は $A \Rightarrow B$ と $B \Rightarrow A$ がともに恒真であることを意味しますから、この規則は Modus Ponens の応用と考えることができます。よく使われる同値な論理式への書き換えは以下のものです。

ド・モルガン律 (その 1)	$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$
ド・モルガン律 (その 2)	$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
対偶律	$A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$
$\vee$ による $\Rightarrow$ の書き換え	$A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$
$\Rightarrow$ による $\vee$ の書き換え	$A \vee B \Longleftrightarrow \neg A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Rightarrow A$

1 ページの論証では、(15) と (18) で「ド・モルガン律」、(2) と (16) で「対偶律」、(8) と、(11)、(21) で「$\vee$ の $\Rightarrow$ による書き換え」が行なわれています[3]。

また、あまり意識されることはありませんが、この配布資料の付録に挙げているような論理式の書き換えが暗黙の内に使われます[4]。

[3] (2)、(8)、(11)、(16)、(21) では、対偶律や $\vee$ の $\Rightarrow$ による書き換えが行なわれた後に、さらに Modus Ponens が使われています

[4] 付録に挙げられているすべての法則は、今回紹介している他の推論規則 (「Modus Ponens」、「含意の導入」、「否定の導入」、「背理法」、「否定の除去」、「矛盾の利用」、「両刀論法」、「その他の規則」) を使えば導出することができます

含意の導入　$A \Rightarrow B$ であることを論証する際には、

　　A を仮定して、そこから B を導くことができるのなら、$A \Rightarrow B$ を導いてよい

という規則が有用です。この規則は次のように表します。

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}$$

横線の上の「$[A]$ $\cdots$ B」の部分が、「A を仮定すれば B を導ける」ことを表しています。B を導く過程では、その論証は、A (が真である) という仮定に依存していますが、この規則の帰結である $A \Rightarrow B$ は、A の真偽に関わらず成立することに注意してください。

メモ

「含意の導入」は、1 ページの論証では直接的には使われていませんが、基本的な論証の方法の一つです。1 ページの論証では、この規則の変形とみなすことができる次の「否定の導入」が (5) と (13) で使われています。

否定の導入　$\neg A$ を論証する際には、

　　A を仮定して、そこから矛盾を導くことができるのなら、$\neg A$ を導いてよい

という規則を用いることができます。

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}$$

ここに現われている $\bot$ は、偽を意味する命題定数です。絶対になり立つことのない「偽」が導かれてしまったことが、「矛盾」が生じた、つまり、仮定が間違っていたことを意味しています。

付録にあるように $\neg A$ と $A \Rightarrow \bot$ は同値ですので、このことと、先ほどの「含意の導入」を組み合せると「否定の導入」の代りになります。この科目では「否定の導入」を、次に紹介する「背理法」とは別の規則として扱っています[5]が、「否定の導入」を含めて「背理法」と呼ぶこともあります。

メモ

[5] これは、$\neg A$ を $A \Rightarrow \bot$ の省略形とみなすと、「否定の導入」の規則は不要になりますが、(次に紹介する狭義の)「背理法」はそうでないからです。(次に紹介する狭義の)「背理法」は、付録の「二重否定律」と等価になります

背理法　背理法は $\neg A$ を仮定して、矛盾を導くことができるのなら、(その A という仮定に関係なく) A が論証できる、という規則です。この規則は次のように表します。

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \perp\end{array}}{A}$$

1 ページの論証では (19) で、この「背理法」が使われています。「否定の導入」を用いて $\neg\neg A$ を導いた後に、付録の「二重否定律」$\neg\neg A \Longleftrightarrow A$ を使えば「背理法」の代りができます。

否定の除去 (矛盾の導入)　矛盾を意味する $\perp$ (偽を表す命題定数) は、次の規則で導くことがよくあります。

$$\dfrac{A \quad \neg A}{\perp}$$

この推論の規則は「否定の除去」と呼ばれます。付録にあるように、$\neg A$ は $A \Rightarrow \perp$ と同値ですから、このことを使えば、Modus Ponens を用いても、A と $\neg A$ から $\perp$ が導けることに注意してください。1 ページの論証では、(4)、(12)、(18) で「否定の除去」が使われています。

メモ

矛盾の利用　もし、矛盾が導かれているのなら、そこから好きな命題を導くことができます。つまり、次のような推論をして構いません。

$$\dfrac{\perp}{A}$$

A は任意の論理式です。一見、不思議な推論に見えますが、

$$\perp \Rightarrow A \iff \neg\perp \vee A \iff \top \vee A \iff \top$$

ですので、$\perp \Rightarrow A$ は、A がどのような論理式であっても恒真です。このため、Modus Ponens を使えば、

$$\dfrac{\perp \qquad \perp \Rightarrow A}{A}$$

という推論で、A を導くことができます。

メモ

両刀論法　論理和の形の前提を利用した推論をする場合に有用なものに「**両刀論法**」と呼ばれるものがあります。これは次のような規則です。

$$\dfrac{A \lor B \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$$

すでに、$A \lor B$ が論証できている時、A を仮定した場合も、B を仮定した場合も、どちらでも C が導けるのなら、結局、C を導いてよいという規則です。

メモ

その他の規則　推論の規則にはその他にも以下のようなものが考えられますが、あまりにも基本的なものであるため、これらが意識されることはほとんどありません。

$$\frac{A \quad B}{A \land B} \qquad \frac{A \land B}{A} \qquad \frac{A \land B}{B} \qquad \frac{A}{A \lor B} \qquad \frac{B}{A \lor B}$$

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 2 回・終わり

付録: 同値な論理式に関する法則

$$
\begin{array}{rll}
 & \neg\top \iff \bot & \neg\bot \iff \top \\
 & A\land\bot \iff \bot & A\lor\top \iff \top \\
 & A\land\top \iff A & A\lor\bot \iff A \\
\text{(矛盾律)} & A\land\neg A \iff \bot \quad \text{(排中律)} & A\lor\neg A \iff \top \\
\text{(べき等律)} & A\land A \iff A & A \iff A\lor A \\
\text{(交換律)} & A\land B \iff B\land A & A\lor B \iff B\lor A \\
\text{(結合律)} & A\land(B\land C) \iff (A\land B)\land C & A\lor(B\lor C) \iff (A\lor B)\lor C \\
\text{(分配律)} & A\land(B\lor C) \iff (A\land B)\lor(A\land C) & A\lor(B\land C) \iff (A\lor B)\land(A\lor C) \\
\text{(吸収律)} & A\land(A\lor B) \iff A & A\lor(A\land B) \iff A \\
\text{(ド・モルガン律)} & \neg(A\land B) \iff \neg A\lor\neg B & \neg(A\lor B) \iff \neg A\land\neg B
\end{array}
$$

注意　以上の法則では、$\land$ と $\lor$ とを、$\top$ と $\bot$ とを、相互に置き換えても、同じ法則が成立していること (**双対性**) に注意する。

注意　交換律と結合律により、$A_1\land A_2\land\ldots A_3\land\ldots\land A_n$ や $A_1\lor A_2\lor\ldots A_3\lor\ldots\lor A_n$ の形の論理式は、$A_1,\ A_2,\ \ldots A_3,\ \ldots,\ A_n$ の並べ方を変えても (元の論理式と) 同値となることが分かる。

$$
\begin{array}{rl}
\text{(二重否定律)} & \neg\neg A \iff A \\
\text{(対偶律)} & A\Rightarrow B \iff \neg B\Rightarrow\neg A
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{(}\Rightarrow\text{ と }\bot\text{ による }\neg\text{ の書き換え)} & \neg A \iff A\Rightarrow\bot \\
\text{(}\lor\text{ による }\land\text{ の書き換え)} & A\land B \iff \neg(\neg A\lor\neg B) \\
\text{(}\Rightarrow\text{ による }\land\text{ の書き換え)} & A\land B \iff \neg(A\Rightarrow\neg B) \\
\text{(}\land\text{ による }\lor\text{ の書き換え)} & A\lor B \iff \neg(\neg A\land\neg B) \\
\text{(}\Rightarrow\text{ による }\lor\text{ の書き換え)} & A\lor B \iff \neg A\Rightarrow B \\
\text{(}\land\text{ による }\Rightarrow\text{ の書き換え} & A\Rightarrow B \iff \neg(A\land\neg B) \\
\text{(}\lor\text{ による }\Rightarrow\text{ の書き換え)} & A\Rightarrow B \iff \neg A\lor B
\end{array}
$$

注意　これらの法則から分かるように、論理演算子 $\land$、$\lor$、$\Rightarrow$ のいずれか 1 つと、$\neg$ があれば、他の論理演算子はその 2 つを組み合わせて表現できる。

$$A\Rightarrow B\Rightarrow C \iff A\land B\Rightarrow C \iff B\Rightarrow A\Rightarrow C$$

注意　この法則により、$A_1\Rightarrow A_2\Rightarrow\ldots A_3\Rightarrow\ldots\Rightarrow A_n\Rightarrow B$ は $A_1,\ A_2,\ \ldots A_3,\ \ldots,\ A_n$ の並べ方を変えても (元の論理式と) 同値となることが分かる。