集合と論理 (集合と位相及び演習)・第１回

2022 年 9 月 30 日

今回の内容

1.1 命題 1–2
1.2 命題論理 1–2
1.3 論理式 1–3
1.4 論理式の例 1–4
1.5 論理式の意味 1–5
1.6 恒真性と充足可能性 1–6
1.7 必要条件と十分条件、同値、逆、対偶 1–6

シラバス抜粋[1]

講義概要	数学や情報科学の基礎となる、集合、関係、写像の概念と、論理的に主張を展開する際の基本的な手法について学びます。
到達目標	集合、関係、写像の概念を理解し、証明やプログラミングで利用できる。
講義方法	配布資料に沿って講義と演習を行ないます。
成績評価の方法	期末試験 (100 点満点) と提出された演習課題等で評価します。期末試験が x 点、課題の得点率が y % のとき、総合的な成績は $x+(100-x)y/500$ 点 (端数切り捨て) となります。
講義計画	(1) 命題 (2) 命題の論証 (3) 集合 (4) 集合・論理演算の基本的性質 (5) 全称記号と存在記号 (6) 関係と写像 (7) 同値関係、順序関係 (8) 最大と最小、極大と極小、上界と下界、上限と下限 (9) 全称記号がかかわる論証 (10) 存在記号がかかわる論証 (11) 濃度 (12) ブール代数 (13) グラフと木 (14) 数学的帰納法 (15) まとめ
テキスト	なし。配布資料は次の Web ページからから入手できます。 `http://www602.math.ryukoku.ac.jp/SLogic/`
参考文献	小森 洋平『集合と位相』(日本評論社) 2,310 円

メモ

---

[1] 新型コロナウィルス感染症の影響で、成績評価方法を含めて変更される可能性がありますので注意してください

1.1　命題

物事について客観的に述べる形の文 (平叙文) の内、「龍谷大学瀬田学舎の郵便番号は 520-2194 である」や「3 足す 4 は 10 である」など、その真偽[2]が明確に定まるような主張 (言明) のことを**命題**と呼びます。真なのか偽なのかがすでに分かっている必要はありません。そのどちらかであることが分かっていれば十分です。

注意　物事について客観的に述べる形の文でも、すべての主張が命題と考えられる訳ではありません。例えば、次のような主張は命題とは考えません。

この黒枠の中に書かれていることは偽である。

メモ

1.2　命題論理

この科目では、ある主張が命題であるか否かについて深く考えることはしません。また、それぞれの命題の中身 (何を主張しているのか) について考えることもしません。

それが具体的にどのような命題であるかは無視して、その真偽だけに注目したとき、個々の命題の真偽とそれらを組み合わせてできる命題の真偽との間に成り立つ関係を命題論理と呼びます。この科目では、まず、この命題論理について勉強します。

命題の合成　命題論理では、基本となる (それ以上の深い分析を行わない) 命題を元にして、「でない (否定)」、「かつ (論理積)」、「または (論理和)」、「ならば (含意)」など、一般に「**論理演算**」と呼ばれるもので命題を組み合わせます。

否定	A でない	(A が成り立たない)
論理積	A かつ B	(A と B が共に成り立つ)
論理和	A または B	(A と B の少なくともどちらか一方は成り立つ)
含意	A ならば B	(A が成り立っている限りは B が成り立つ)

注意　論理和や含意は、日常での「または」や「ならば」の使い方と異なる場合があることに注意してください。例えば、「入学式に出席すると念珠またはボールペンがもらえます」と言ったら、通常は、そのどちらから一方がもらえるという意味で、その両方がもらえる場合を想定していませんが、命題論理の論理和では、A と B の両方が真の場合でも、「A または B」は真と考えます[3]。また、

[2]「正しい」のか「正しくない」のか、あるいは「成立する」のか「成立しない」のか

[3] A と B の一方だけが成り立つときのみ真となるような論理演算は「**排他的論理和**」と呼んで、単なる論理和とは別に考えます

「今日が雨ならば 17 は素数である」と主張されると、「今日が雨」と「17 は素数」には何の関係もないので、これはおかしな主張だと考えることがありますが、命題論理の含意と呼ばれる論理演算では、この命題を真とみなします。これらの論理演算の意味は後ほど正確に定義しますので、日常での意味にあまりとらわれないようにしてください。

1.3 論理式

数の加減乗除の性質を考えるのに数式が使われるのと同様に、命題の真偽に関する論理演算の性質を議論するために「**論理式**」と呼ばれる書き方が使われます。この科目では命題論理の論理式を次のように定義します。

(1) $\top$ と $\bot$ はそれぞれ論理式である。$\top$ と $\bot$ を「**命題定数**」と呼び、それぞれ真と偽を意味するものとして扱う。

(2) $X, Y, Z, \ldots$ は論理式である[4]。これらを「**命題変数**」と呼び、それぞれ、基本となる (それ以上の深い分析を行わない) 何らかの命題の真偽を意味するものとして扱う。

(3) A, B が論理式ならば次の 4 つも論理式である。それぞれ、否定、論理積、論理和、含意を意味するものとして扱う。

$$(\neg A) \qquad (A \wedge B) \qquad (A \vee B) \qquad (A \Rightarrow B)$$

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ を**論理演算子**と呼ぶ。

(4) 上の (1)、(2)、(3) で論理式とわかるものだけが論理式である。

注意　命題変数は、ある命題の真偽を意味しているのであって、その命題が具体的にどのような主張 (文) なのかを意味しているのではありません。

注意　ここで用いられている命題定数や論理演算子の記法はあくまで 1 つの流儀でしかありません。例えば、$\top$ と $\bot$ を、それぞれ True と False、あるいは T と F、$\neg A$ を $\overline{A}$ や $\sim A$、$A \vee B$ を $A + B$、$A \wedge B$ を $A \cdot B$、$A \Rightarrow B$ を $A \rightarrow B$ や $A \supset B$ などと書いたりすることがあります。

メモ

原子論理式と複合論理式　命題定数や命題変数そのものである論理式を**原子論理式**、論理演算子を含む論理式を**複合論理式**と呼びます。また、論理式の一部として現れている論理式をその論理式の**部分論理式**と呼びます。その論理式自体 (全体) も自分自身の部分論理式の 1 つであることに注意してください。

[4] $X, Y, Z, \ldots$ は命題変数につけた名前ですので、他のものと混同がない範囲で自由に選ぶことができます

論理式の括弧の省略　次の優先度にしたがって論理式が結合されるものとして不必要な括弧を省略することにします。

優先度	高い $\longleftrightarrow$ 低い			
論理演算子	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$

例えば、$\neg X \vee \neg Y \wedge Z \Rightarrow Y \wedge Z$ という論理式を括弧を省略せずに書くと $(((\neg X) \vee ((\neg Y) \wedge Z)) \Rightarrow (Y \wedge Z))$ となります。

同じ演算子が複数連なる場合は、$\wedge$ や $\vee$ については左の方が先に、$\Rightarrow$ については右の方が先に結合するものとして扱います。たとえば、$A \wedge B \wedge C$ や $A \vee B \vee C$ を括弧を省略せずに書くと $((A \wedge B) \wedge C)$ や $((A \vee B) \vee C)$ となり、$A \Rightarrow B \Rightarrow C$ は $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ となります。

メモ

1.4　論理式の例

次のような論理パズルを例として、命題を論理式で書き表してみます。

犯人を探せ　ある事件の捜査の過程で 4 人の容疑者 w, x, y, z が浮かび上がり、さまざまな証拠によって次の 5 つの命題が成り立っていることが判明した。犯人は誰であろうか?

(a) 犯人は w、x、y、z の中にいる。この内の複数の共犯ということも考えられる。

(b) w が犯人でないとすると、y も犯人ではない。

(c) w と x の中に犯人がいれば、y と z の中にその共犯がいる。

(d) w が犯人なら、x や y は犯人でない。

(e) z が犯人なら、w か y の少なくとも一方はその共犯である。

w、x、y、z の 4 人がそれぞれ犯人であるということを、4 つの命題変数 W、X、Y、Z で表現すると、(a) 〜 (e) の 5 つの命題はそれぞれ以下のような論理式で表現することができます[5]。

(a) $W \vee X \vee Y \vee Z$

(b) $\neg W \Rightarrow \neg Y$

(c) $W \vee X \Rightarrow Y \vee Z$

(d) $W \Rightarrow \neg X \wedge \neg Y$

(e) $Z \Rightarrow W \vee Y$

[5] 括弧はできるだけ省略しています

1.5 論理式の意味

それぞれの命題変数についての真偽が決まれば、論理式全体の真偽が定まります。1 で真を、0 で偽を表すことにして、それぞれの命題変数の値 (真偽) が 1 (=真) あるいは 0 (=偽) に決まっているとすると、論理式全体の値 (真偽) は次のように定まります。

(1) 命題定数 $\top$ の意味は 1 である。

(2) 命題定数 $\bot$ の意味は 0 である。

(3) 複合論理式 $\neg A$、$A \wedge B$、$A \vee B$、$A \Rightarrow B$ の意味は、部分論理式 A や B の値に応じて、それぞれ次の表のようになる。

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

真理値表　論理式の中に現れている命題変数の値が決まれば、その論理式全体の値が決まりますが、この対応関係を表で表したものを「**真理値表**」と呼びます。論理式の中に n 個の命題変数があれば、それらの値の組み合わせは 2^n 通りありますので、それぞれの場合について論理式の値がどうなるかを真理値表の各行に記述します[6]。例えば、$\neg X \vee \neg Y \wedge Z \Rightarrow Y \wedge Z$ という論理式の真理値表は以下のようになります[7]。

命題変数			各部分論理式					論理式全体
X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg Y \wedge Z$	$\neg X \vee \neg Y \wedge Z$	$Y \wedge Z$	$\neg X \vee \neg Y \wedge Z \Rightarrow Y \wedge Z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1

メモ

[6]通常、各命題変数の値の列を 2 進表記の (非負の) 整数とみなしたとき、小さい順に行が並ぶように書きます

[7]この真理値表では各部分論理式の値も表中に示していますが、通常は省略します

1.6 恒真性と充足可能性

命題変数の値にかかわらずその値が 1(=真) となる場合、その論理式は「**恒真**」であると言います。また、命題変数の値を適当に定めることでその値を 1(=真) にできる場合、その論理式は**充足可能**であると言います。当然、恒真な論理式は充足可能です。例えば、$X \vee \neg X$ や $X \wedge Y \Rightarrow Y$ という論理式は恒真で、もちろん充足可能ですし、$X \wedge Y$ という論理式は充足可能ではありますが恒真ではありません。また、$X \wedge \neg X$ は充足可能でなく、もちろん恒真でもありません。

メモ

1.7 必要条件と十分条件、同値、逆、対偶

必要条件と十分条件　論理式 $A \Rightarrow B$ が恒真であるとき、

A は B の**十分条件**である

と言い、

B は A の**必要条件**である

と言います。

メモ

同値　論理式 $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ が恒真であるとき、つまり、A が B の必要条件であり、かつ十分条件であるとき、

A と B は**同値**である

または、

A は B の**必要十分条件**である

と言います。

メモ

論理式 A と B が同値あることを、この科目では、$A \iff B$ と書き表すことにします。また、$A_1 \iff A_2 \iff A_3 \iff \ldots \iff A_n$ で、n 個の論理式 A_1、A_2、A_3、$\ldots$、A_n が互いにすべて同値であることを表すものとします。

注意　この $\Longleftrightarrow$ は論理演算子ではありませんので、$\Longleftrightarrow$ が論理式の中に現われることはありません。この科目の中で、「A と B は同値である」と書く代りに、「$A \Longleftrightarrow B$」と書くだけに過ぎません。

逆　論理式 $A \Rightarrow B$ に対して、$B \Rightarrow A$ を、その「**逆**」と呼びます。$A \Rightarrow B$ が真 (偽) であるからと言って、その逆 $B \Rightarrow A$ もそうだとは限りません。例えば、$X \Rightarrow Y$ と、$Y \Rightarrow X$ の真理値表を書いてみると次のようになります。

X	Y	$X \Rightarrow Y$	$Y \Rightarrow X$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

また、$A \Rightarrow B$ が恒真 (充足可能) であるからと言って、$B \Rightarrow A$ もそうだとは限りません。

メモ

対偶　論理式 $A \Rightarrow B$ に対して、$\neg B \Rightarrow \neg A$ を、その「**対偶**」と呼びます。$A \Rightarrow B$ とその対偶 $\neg B \Rightarrow \neg A$ は常に同値になります。つまり、$A \Rightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ です。$X \Rightarrow Y$ と、その対偶 $\neg Y \Rightarrow \neg X$ の真理値表を書いて確かめてみると次のようになります。

X	Y	$X \Rightarrow Y$	$\neg Y$	$\neg X$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

集合と論理 (集合と位相及び演習)・第 1 回・終わり