集合と論理 (集合と位相及び演習)・中野・金 2・定期試験問題

2023 年 1 月 27 日

I　命題変数 $X,\ Y,\ Z$ を含む次の論理式 F の真理値表を完成しなさい。(10 点)

$$F = (\neg Z \vee X) \Rightarrow (Y \wedge X)$$

II　ある事件の捜査の過程で 3 人の容疑者 x、y、z が浮かび上がり、さまざまな証拠によって次の 3 つの命題が成り立っていることが判明した。

(a) x、y、z の少なくとも 1 人は犯人である。

(b) x が犯人なら、y も犯人で z は犯人でない。

(c) y と z の中に犯人がいれば、x も犯人である。

(1)「x は犯人である」、「y は犯人である」、「z は犯人である」という 3 つの命題の真偽を、命題変数 $X,\ Y,\ Z$ でそれぞれ表すとき、上の (a) ～ (c) がすべて成り立つという命題を論理式で表しなさい。(10 点)

(2) その論理式を簡単化して、犯人をつきとめなさい。(10 点)

III　個体変数 $x,\ y,\ z$ は実数を表し、A と B は実数を要素とする集合を表すものとする。

(1) 論理式 $\forall x \in A.\ \exists y \in B.\ z \leqq y \vee x \leqq z$ を、$\forall y$ で始まり、$\exists y$ が現れない同値な論理式に書き換えなさい。(10 点)

(2) 論理式 $\neg(\forall x \in A.\ \exists y \in B.\ z \leqq y \vee x \leqq z)$ を $\neg$ が現れない同値な論理式に書き換えなさい。ただし、実数の大小を表す二項関係 $<$ や $>$ を用いてもよい。(10 点)

IV　集合 $\{\,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\,\}$ のべき集合を A とする。集合の間の包含関係 $\subset$ を、集合 A 上の半順序関係とみなすとき、次の集合の下限を求めなさい。(10 点)

$$\big\{\{\,1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\,\},\ \{\,1,\ 3,\ 5,\ 7\,\},\ \{\,2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\,\},\ \{\,2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\,\}\big\}$$

V　集合 $A = \{\,1,\ 2,\ 3\,\}$ と $B = \{\,1,\ 2,\ 3,\ 4\,\}$ について、直積 $A \times B$ の部分集合 $F = \{\,\langle 2,\ 1\rangle,\ \langle 3,\ 2\rangle,\ \langle a,\ b\rangle\,\}$ を考える。ただし、$|F| = 3$ で、a と b は自然数である。

(1) F が A から B への写像のグラフとなるような a、b の組をすべて求めなさい。(5 点)

(2) F が A から B への単射のグラフとなるような a、b の組をすべて求めなさい。(5 点)

VI　整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ で、実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。次の内、可算集合であるものをすべて挙げなさい。(10 点)

(a) $\mathbb{Z}$　　(b) $\mathbb{R}$　　(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$　　(e) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R}$　　(f) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$

(g) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$　　(h) $\mathbb{Z}$ のべき集合　　(i) $\mathbb{R}$ のべき集合

VII　$G = \langle V,\ E,\ \varphi\rangle$ を連結な有限グラフとして、次の定理について考える。

$|V| \leqq |E| + 1$

(1) この定理を $|V|$ に関する数学的帰納法で示すとき、induction step で示さなければならない命題はどうなるか。(10 点)

(2) G が有限グラフであっても、連結でないとき、この定理は成り立たない。反例となるグラフを図示しなさい。(10 点)

(定期試験問題終り)

集合と論理 (集合と位相及び演習) ・定期試験・解答用紙

I

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

II (1)

$$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \Rightarrow Y \wedge \neg Z) \wedge (Y \vee Z \Rightarrow X)$$

(2)

$$\begin{aligned}&(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \Rightarrow Y \wedge \neg Z) \wedge (Y \vee Z \Rightarrow X)\\ &\qquad\iff (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee (Y \wedge \neg Z)) \wedge (\neg(Y \vee Z) \vee X)\\ &\qquad\iff (X \vee ((Y \vee Z) \wedge \neg(Y \vee Z)) \wedge (\neg X \vee (Y \wedge \neg Z))\\ &\qquad\iff X \wedge (\neg X \vee (Y \wedge \neg Z))\\ &\qquad\iff X \wedge Y \wedge \neg Z\end{aligned}$$

よって、x と y が犯人で、z は犯人でない。

III (1)

$$\forall y \in A.\ \exists x \in B.\ z \leqq x \vee y \leqq z$$

(2)

$$\exists x \in A.\ \forall y \in B.\ y < z \wedge z < x$$

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

(裏面に続く)

集合と論理 (集合と位相及び演習)・定期試験・解答用紙

IV

$$\{\,3,\ 5\,\}$$

V (1)

$$\langle a,\ b\rangle = \langle 1,\ 1\rangle,\ \langle 1,\ 2\rangle,\ \langle 1,\ 3\rangle,\ \langle 1,\ 4\rangle$$

(2)

$$\langle a,\ b\rangle = \langle 1,\ 3\rangle,\ \langle 1,\ 4\rangle$$

VI

(a) $\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(f) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$

VII (1)

$|V'| = k$ である任意の連結な有限グラフ $G' = \langle V',\ E',\ \varphi'\rangle$ が $|V'| \leqq |E'| + 1$ を満たすならば、$|V| = k+1$ である任意の連結な有限グラフ $G = \langle V,\ E,\ \varphi\rangle$ は $|V| \leqq |E| + 1$ を満たす。

(2)

次のような有限グラフ $G = \langle V,\ E,\ \varphi\rangle$ を考えると、$|V| = 2$、$|E| = 0$ であるので、$|V| \leqq |E| + 1$ を満たさない。