集合と論理 (集合と位相及び演習)・中野・金2・定期試験問題 2022年1月28日

I 命題変数 $X,\ Y,\ Z$ を含む次の論理式 F の真理値表を完成しなさい。(10点)

$$F = (\neg X \vee Z) \wedge (Y \Rightarrow X)$$

II ある事件の捜査の過程で3人の容疑者 x、y、z が浮かび上がり、さまざまな証拠によって次の3つの命題が成り立っていることが判明した。

(a) x と z の少なくとも一方が犯人ならば、y も犯人である。

(b) x が犯人でないならば、y は犯人である。

(c) y が犯人ならば、x や z は犯人でない。

(1)「x は犯人である」、「y は犯人である」、「z は犯人である」という3つの命題の真偽を、命題変数 $X,\ Y,\ Z$ でそれぞれ表すとき、上の (a) ～ (c) がすべて成り立つという命題を論理式で表しなさい。(10点)

(2) その論理式を簡単化して、犯人をつきとめなさい。(10点)

III 個体変数 $x,\ y,\ z$ は実数を表し、A と B は実数を要素とする集合を表すものとする。存在量化子 $\exists z \in A$ で始まり、全称量化子が現われないような論理式で、次の論理式と同値なものを書きなさい。(10点)

$$\neg\,(\forall x \in A.\ x < y \Rightarrow \exists z \in B.\ z < y \wedge z \leqq x)$$

IV 集合 $\{\,1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\,\}$ のべき集合を A とする。集合の間の包含関係 $\subset$ を、集合 A 上の半順序関係とみなすとき、次の集合の上限を求めなさい。(10点)

$$\bigl\{\{\,\},\ \{\,1,\ 3\,\},\ \{\,1,\ 2,\ 5\,\},\ \{\,3\,\}\bigr\}$$

V 実数全体を $\mathbb{R}$ で表す。$\mathbb{R}$ の次のような部分集合 A と B について、A から B への写像 (関数) を考える。

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqq 1 \,\}, \quad B = \{\, y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqq y \,\}$$

(1) A から B への全単射であるような写像 f の例を、$f(x) =$「x を含む数式」の形で定義し、曲線 $y = f(x)$ の概形を描きなさい。(10点)

(2) A から B への全射ではあるが単射ではないような写像 g の例を、$g(x) =$「x を含む数式」の形で定義し、曲線 $y = g(x)$ の概形を描きなさい。(10点)

VI 整数全体を $\mathbb{Z}$ で、実数全体を $\mathbb{R}$ で表す。実数 a に対して、集合 A を次のように定義するとき、直積集合 $A \times \mathbb{Z}$ が非可算集合となるような a の値の範囲を求めなさい。(10点)

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqq x \leqq a \,\}$$

VII $G = \langle V,\ E,\ \varphi \rangle$ を単純グラフとして、次の定理について考える。

$|E| > \dfrac{1}{2}\bigl(|V| - 1\bigr)\bigl(|V| - 2\bigr)$ ならば、G は連結である。

(1) この定理を $|V|$ に関する数学的帰納法で示すとき、induction step で示さなければならない命題はどうなるか。(10点)

(2) G が単純グラフでないとき、この定理は成り立たない。反例となるグラフを図示しなさい。(10点)

(定期試験問題終り)

集合と論理 (集合と位相及び演習)・定期試験・解答用紙

I

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

II (1)

$$(X \vee Z \Rightarrow Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow \neg X \wedge \neg Z)$$

(2)

$$\begin{aligned}
&(X \vee Z \Rightarrow Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow \neg X \wedge \neg Z) \\
&\qquad = (\neg(X \vee Z) \vee Y) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee (\neg X \wedge \neg Z)) \\
&\qquad = ((\neg X \wedge \neg Z) \vee Y) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee (\neg X \wedge \neg Z)) \\
&\qquad = ((Y \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z)) \wedge (X \vee Y) \\
&\qquad = \neg X \wedge \neg Z \wedge (X \vee Y) \\
&\qquad = \neg X \wedge Y \wedge \neg Z
\end{aligned}$$

よって、y が犯人で、x や z は犯人でない。

III

$$\exists z \in A.\ \neg(z < y \Rightarrow \exists x \in B.\ x < y \wedge x \leqq z)$$

IV

$$\{\, 1,\ 2,\ 3,\ 5 \,\}$$

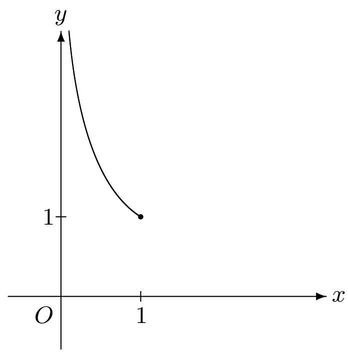
学籍番号　　　　　　　　　　氏名

(裏面に続く)

集合と論理 (集合と位相及び演習)・定期試験・解答用紙

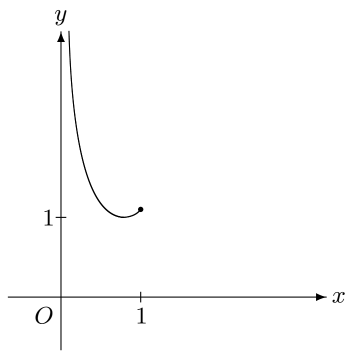
V (1)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



(2)

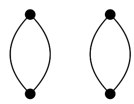
$$g(x) = \frac{1}{\sin 2x}$$



VI $a < 1$ の場合、A は空集合となるので、$|A \times \mathbb{Z}| = 0$ である。また、$a = 1$ なら $A = \{ 1 \}$ となり、$|A \times \mathbb{Z}| = |\{ 1 \} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}|$ であるから、$A \times \mathbb{Z}$ は可算集合となる。一方、$1 < a$ の場合、A 自体が非加算集合となるので、$A \times \mathbb{Z}$ も非加算集合となる。よって、求める範囲は $1 < a$。

VII (1) $|V'| = k$ で、$|E'| > \frac{1}{2}(|V'| - 1)(|V'| - 2)$ を満たす任意の単純グラフ $G' = \langle V',\ E',\ \varphi' \rangle$ が連結ならば、$|V| = k + 1$ で、$|E| > \frac{1}{2}(|V| - 1)(|V| - 2)$ を満たす任意の単純グラフ $G = \langle V,\ E,\ \varphi \rangle$ は連結である。

(2) 次のようなグラフを G とすると、$|V| = 4$、$|E| = 4$ で、$|E| > \frac{1}{2}(|V| - 1)(|V| - 2)$ を満たすが、連結でない。



(解答用紙終り)