

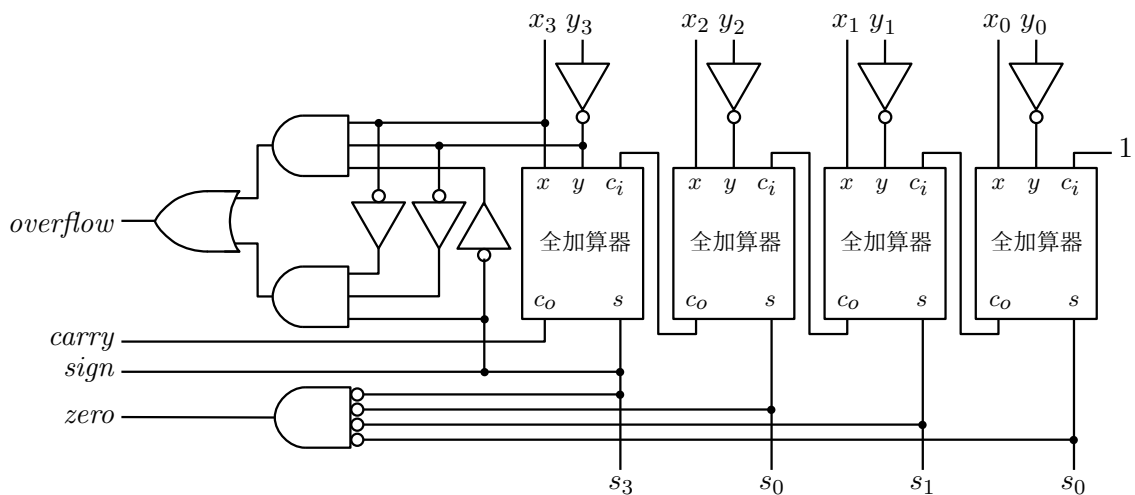
今回の内容

7.1 いろいろな演算回路 7-1

7.1 いろいろな演算回路

前回、2 進表現された非負整数の加算器や、2 の補数表現を利用した減算器を紹介しましたが、他の演算器も論理回路として実現することができます。今回はこのような演算回路をいくつか紹介します。

比較器 減算器を応用すると、2 進表現された 2 つの整数の大きさを比較することができます。次の論理回路は、4 bit の整数の大小を比較することができます。



この比較器は、符号なし整数どうしの比較にも、符号付き整数どうしの比較にも使用することができます。2 つの 4 bit の 2 進表現 $x = x_3 x_2 x_1 x_0$ と $y = y_3 y_2 y_1 y_0$ を比較して、その結果を $overflow^1$ 、 $carry$ 、 $sign$ 、 $zero$ の 4 つの真理値として出力します。2 つの整数 x 、 y の間の大小と、4 つの出力値との対応関係は次のようになります。

x と y の間の関係	その関係を表す論理式 ²	
	x 、 y が符号なしの場合	x 、 y が符号付きの場合
$x = y$	$zero$	
$x \neq y$	$\overline{zero}$	
$x < y$	$\overline{carry}$	$sign \oplus overflow$
$x \geq y$	$carry$	$\overline{sign \oplus overflow}$
$x > y$	$carry \cdot \overline{zero}$	$\overline{sign \oplus overflow} \cdot \overline{zero}$
$x \leq y$	$\overline{carry} + zero$	$(sign \oplus overflow) + zero$

¹ 前回紹介したものです。

² $\oplus$ は第 3 回で紹介した排他的論理和を表します。

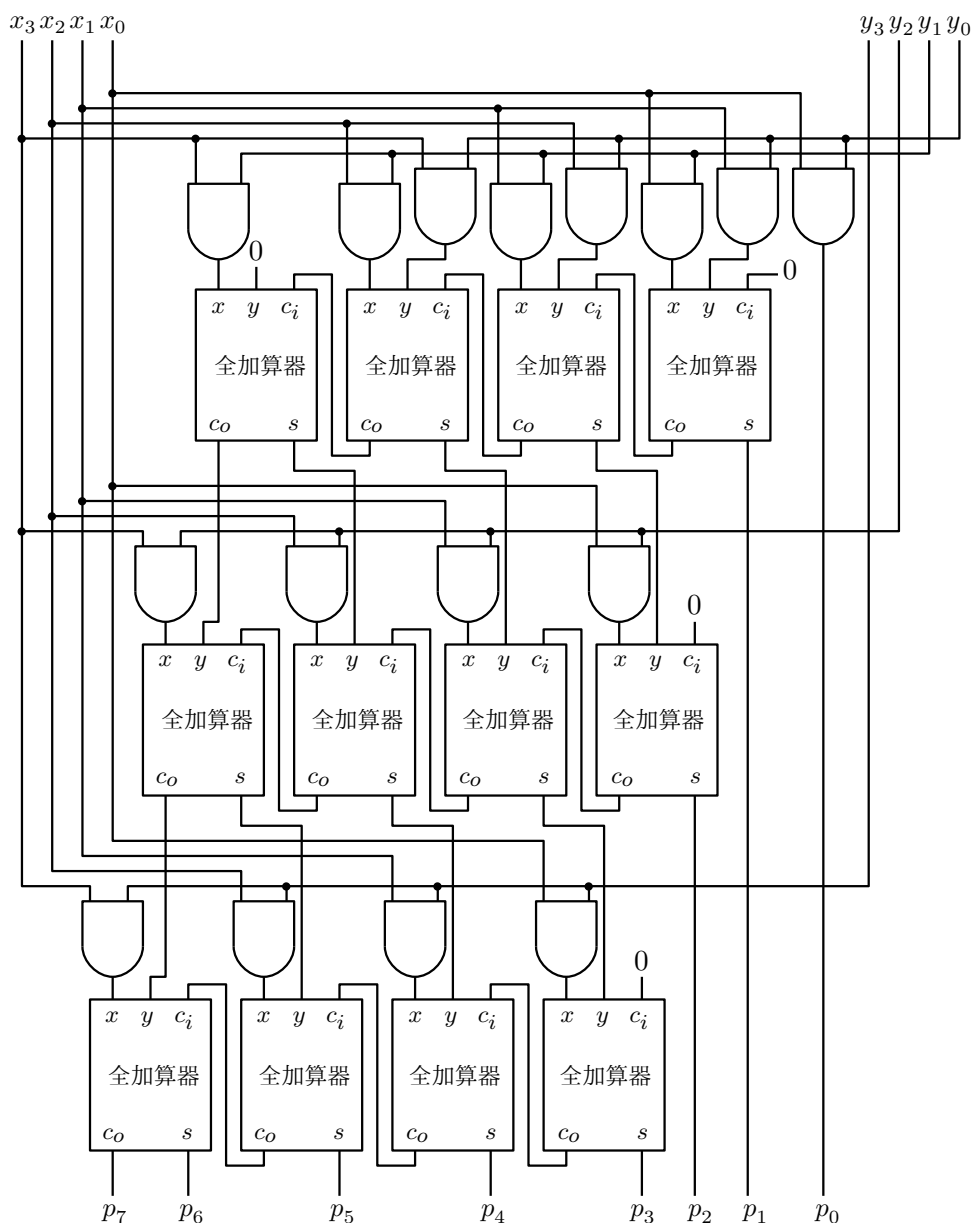
乗算器 筆算による掛け算の手順をそのまま論理回路にすることで、2進表現された符号なし(非負)整数の乗算器を作成することができます。例えば、4桁の2つ2進数1100と1011との掛け算を筆算で行うと右のようになります。

一般に、2つの4 bit の2進表現 $x = x_3 x_2 x_1 x_0$ と $y = y_3 y_2 y_1 y_0$ の筆算による掛け算の様子は、次のようになります。

$$\begin{array}{r}
 1\ 1\ 0\ 0 \\
 \times 1\ 0\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 0 \\
 1\ 1\ 0\ 0 \\
 0\ 0\ 0\ 0 \\
 + 1\ 1\ 0\ 0 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\
 \times & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\
 \hline
 & & x_3 \cdot y_0 & x_2 \cdot y_0 & x_1 \cdot y_0 & x_0 \cdot y_0 \\
 & x_3 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_1 & x_0 \cdot y_1 & \\
 & x_3 \cdot y_2 & x_2 \cdot y_2 & x_1 \cdot y_2 & x_0 \cdot y_2 & \\
 + & x_3 \cdot y_3 & x_2 \cdot y_3 & x_1 \cdot y_3 & x_0 \cdot y_3 & \\
 \hline
 p_7 & p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0
 \end{array}
 \end{array}$$

最後の行の8 bit の2進表現 $p_7 p_6 p_5 p_4 p_3 p_2 p_1 p_0$ が、2つの非負整数 x と y の乗算結果です。この計算の手順は次のような論理回路で実現できます。



この論理回路は符号なし整数どうしの乗算を行うものですが、符号付き整数の乗算も、絶対値どうしの乗算と、符号の計算をそれぞれ行い、これら二つを合成することで実現することができます。

除算器 同様に、筆算による割り算の手順にならって、除算器として働く論理回路を実現することもできます。例えば、4桁の2進数 1101 を同じく 4桁の2進数 0101 で割るときの筆算の様子は次のようになります。

$$\begin{array}{r}
 0010 \cdots \text{商} \\
 0101 \overline{) 1101} \\
 \underline{- 0000} \\
 0011 \\
 \underline{- 0000} \\
 0110 \\
 \underline{- 0101} \\
 0011 \\
 \underline{- 0000} \\
 0011 \cdots \text{余り}
 \end{array}$$

次はこの計算を一般化したものです。

$$\begin{array}{r}
 q_3 q_2 q_1 q_0 \cdots \text{商} \\
 y_3 y_2 y_1 y_0 \overline{) 000x_3x_2x_1x_0} \\
 \underline{- y_3 \cdot q_3 y_2 \cdot q_3 y_1 \cdot q_3 y_0 \cdot q_3} \\
 d_{23} d_{22} d_{21} x_2 \\
 \underline{- y_3 \cdot q_2 y_2 \cdot q_2 y_1 \cdot q_2 y_0 \cdot q_2} \\
 d_{13} d_{12} d_{11} x_1 \\
 \underline{- y_3 \cdot q_1 y_2 \cdot q_1 y_1 \cdot q_1 y_0 \cdot q_1} \\
 d_{03} d_{02} d_{01} x_0 \\
 \underline{- y_3 \cdot q_0 y_2 \cdot q_0 y_1 \cdot q_0 y_0 \cdot q_0} \\
 r_3 r_2 r_1 r_0 \cdots \text{余り}
 \end{array}$$

4 bit の2進数 $q_3 q_2 q_1 q_0$ がこの割り算の商で、4 bit の2進数 $r_3 r_2 r_1 r_0$ がこの割り算の余りです。このとき、 q_i ($i = 0, 1, 2, 3$) の値はそれぞれ次のように決まります。

$$\begin{aligned}
 q_3 &= \begin{cases} 0 & (000x_3 < y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (000x_3 \geq y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \end{cases} \\
 q_2 &= \begin{cases} 0 & (d_{23} d_{22} d_{21} x_2 < y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (d_{23} d_{22} d_{21} x_2 \geq y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \end{cases} \\
 q_1 &= \begin{cases} 0 & (d_{13} d_{12} d_{11} x_1 < y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (d_{13} d_{12} d_{11} x_1 \geq y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \end{cases} \\
 q_0 &= \begin{cases} 0 & (d_{03} d_{02} d_{01} x_0 < y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (d_{03} d_{02} d_{01} x_0 \geq y_3 y_2 y_1 y_0 \text{ のとき}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

つまり、 q_i ($i = 0, 1, 2, 3$) の値が0になるのか1になるのかは、2つの4 bit の符号なし整数の大小を比較すれば分かることになります。例えば、上の筆算による除算で、最後に q_0 の値と $r_3 r_2 r_1 r_0$

の値をそれぞれ計算する部分は、1 ページで紹介した比較器を利用して、次のような論理回路で実現できます。

