# 計算機システムⅠ・第7回

2022年6月1日

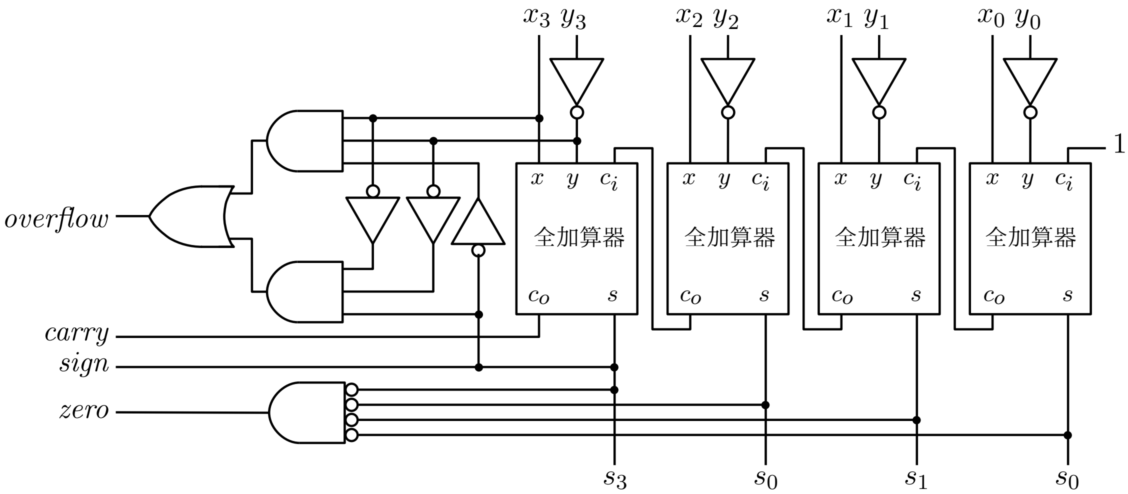
今回の内容



## 7.1　いろいろな演算回路

前回、2進表現された非負整数の加算器や、2の補数表現を利用した減算器を紹介しましたが、他の演算器も論理回路として実現することができます。今回はこのような演算回路をいくつか紹介します。

**比較器**　減算器を応用すると、2進表現された2つの整数の大きさを比較することができます。次の論理回路は、4 bit の整数の大小を比較することができます。




この比較器は、符号なし整数どうしの比較にも、符号付き整数どうしの比較にも使用することができ、2つの4 bit の2進表現 $x = x_3\,x_2\,x_1\,x_0$ と $y = y_3\,y_2\,y_1\,y_0$ を比較して、その結果を *overflow*[1]、*carry*、*sign*、*zero* の4つの真理値として出力します。2つの整数 $x$、$y$ の間の大小と、4つの出力値との対応関係は次のようになります。

| $x$ と $y$ の間の関係 | その関係を表す論理式[2] | |
|---|---|---|
| | $x$、$y$ が符号なしの場合 | $x$、$y$ が符号付きの場合 |
| $x = y$ | $\mathit{zero}$ | |
| $x \neq y$ | $\overline{\mathit{zero}}$ | |
| $x < y$ | $\overline{\mathit{carry}}$ | $\mathit{sign} \oplus \mathit{overflow}$ |
| $x \geqq y$ | $\mathit{carry}$ | $\overline{\mathit{sign} \oplus \mathit{overflow}}$ |
| $x > y$ | $\mathit{carry} \cdot \overline{\mathit{zero}}$ | $\overline{\mathit{sign} \oplus \mathit{overflow}} \cdot \overline{\mathit{zero}}$ |
| $x \leqq y$ | $\overline{\mathit{carry}} + \mathit{zero}$ | $(\mathit{sign} \oplus \mathit{overflow}) + \mathit{zero}$ |

[1] 前回紹介したものです。

[2] $\oplus$ は第3回で紹介した排他的論理和を表します。

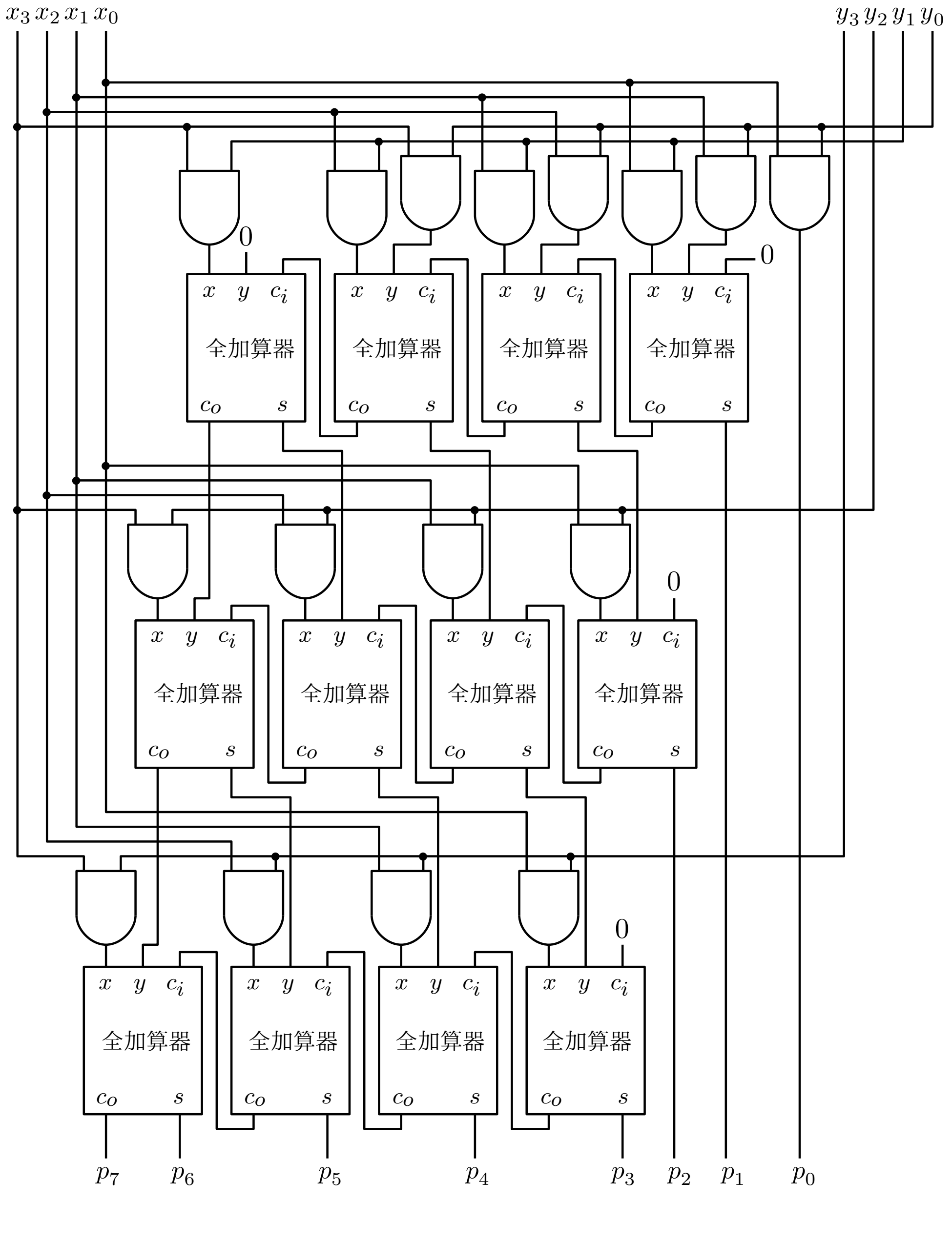
**乗算器**　筆算による掛け算の手順をそのまま論理回路にすることで、2 進表現された符号なし (非負) 整数の乗算器を作成することができます。例えば、4 桁の 2 つ 2 進数 1100 と 1011 との掛け算を筆算で行うと右のようになります。

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & \times & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & + & 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

一般に、2 つの 4 bit の 2 進表現 $x = x_3\,x_2\,x_1\,x_0$ と $y = y_3\,y_2\,y_1\,y_0$ の筆算による掛け算の様子は、次のようになります。

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\
 & & & \times & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\
\hline
 & & & & x_3 \cdot y_0 & x_2 \cdot y_0 & x_1 \cdot y_0 & x_0 \cdot y_0 \\
 & & & x_3 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_1 & x_0 \cdot y_1 & \\
 & & x_3 \cdot y_2 & x_2 \cdot y_2 & x_1 \cdot y_2 & x_0 \cdot y_2 & & \\
+ & x_3 \cdot y_3 & x_2 \cdot y_3 & x_1 \cdot y_3 & x_0 \cdot y_3 & & & \\
\hline
p_7 & p_6 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0
\end{array}
$$

最後の行の 8 bit の 2 進表現 $p_7\,p_6\,p_5\,p_4\,p_3\,p_2\,p_1\,p_0$ が、2 つの非負整数 $x$ と $y$ の乗算結果です。この計算の手順は次のような論理回路で実現できます。



この論理回路は符号なし整数どうしの乗算を行うものですが、符号付き整数の乗算も、絶対値どうしの乗算と、符号の計算をそれぞれ行い、これら二つを合成することで実現することができます。

**除算器**　同様に、筆算による割り算の手順にならって、除算器として働く論理回路を実現することもできます。例えば、4 桁の 2 進数 1101 を同じく 4 桁の 2 進数 0101 で割るときの筆算の様子は次のようになります。

$$
\begin{array}{r}
0\ 0\ 1\ 0 \quad \cdots \text{商} \\
0\ 1\ 0\ 1\ \big)\ \quad 1\ 1\ 0\ 1 \quad\quad\ \\
-\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad \\
0\ 0\ 1\ 1 \quad\quad\quad\quad\ \\
-\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad\quad\quad\quad \\
0\ 1\ 1\ 0 \quad\quad\quad \\
-\ 0\ 1\ 0\ 1 \quad\quad\quad \\
0\ 0\ 1\ 1 \quad\quad\ \\
-\ 0\ 0\ 0\ 0 \quad\quad\ \\
0\ 0\ 1\ 1 \quad \cdots \text{余り}
\end{array}
$$

次はこの計算を一般化したものです。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & \cdots \text{商} \\
y_3\, y_2\, y_1\, y_0\ \big) & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & \\
- & y_3 \cdot q_3 & y_2 \cdot q_3 & y_1 \cdot q_3 & y_0 \cdot q_3 & & & & \\
 & & d_{23} & d_{22} & d_{21} & x_2 & & & \\
 & - & y_3 \cdot q_2 & y_2 \cdot q_2 & y_1 \cdot q_2 & y_0 \cdot q_2 & & & \\
 & & & d_{13} & d_{12} & d_{11} & x_1 & & \\
 & & - & y_3 \cdot q_1 & y_2 \cdot q_1 & y_1 \cdot q_1 & y_0 \cdot q_1 & & \\
 & & & & d_{03} & d_{02} & d_{01} & x_0 & \\
 & & & - & y_3 \cdot q_0 & y_2 \cdot q_0 & y_1 \cdot q_0 & y_0 \cdot q_0 & \\
 & & & & r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & \cdots \text{余り}
\end{array}
$$

4 bit の 2 進数 $q_3\, q_2\, q_1\, q_0$ がこの割り算の商で、4 bit の 2 進数 $r_3\, r_2\, r_1\, r_0$ がこの割り算の余りです。このとき、$q_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ の値はそれぞれ次のように決まります。

$$
q_3 = \begin{cases} 0 & (0\,0\,0\,x_3 < y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (0\,0\,0\,x_3 \geqq y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

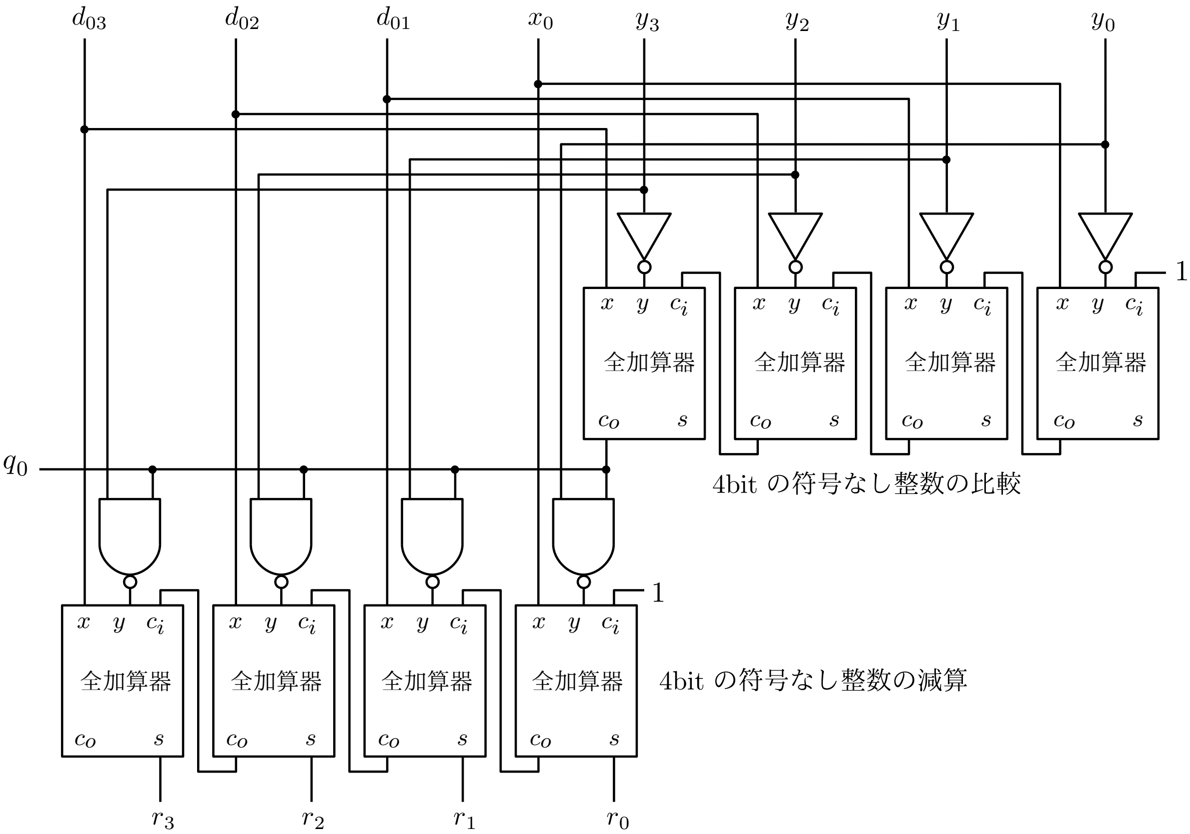
$$
q_2 = \begin{cases} 0 & (d_{23}\, d_{22}\, d_{21}\, x_2 < y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (d_{23}\, d_{22}\, d_{21}\, x_2 \geqq y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

$$
q_1 = \begin{cases} 0 & (d_{13}\, d_{12}\, d_{11}\, x_1 < y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (d_{13}\, d_{12}\, d_{11}\, x_1 \geqq y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

$$
q_0 = \begin{cases} 0 & (d_{03}\, d_{02}\, d_{01}\, x_0 < y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \\ 1 & (d_{03}\, d_{02}\, d_{01}\, x_0 \geqq y_3\, y_2\, y_1\, y_0 \text{ のとき}) \end{cases}
$$

つまり、$q_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ の値が 0 になるのか 1 になるのかは、2 つの 4 bit の符号なし整数の大小を比較すれば分かることになります。例えば、上の筆算による除算で、最後に $q_0$ の値と $r_3\, r_2\, r_1\, r_0$

の値をそれぞれ計算する部分は、1 ページで紹介した比較器を利用して、次のような論理回路で実現できます。




計算機システム I ・第 7 回・終わり