計算機システムⅠ・第5回

2022年5月18日

今回の内容

5.1　論理和標準形

x	y	z	$f(x,\ y,\ z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

前回、与えられた真理値表の値が1となっている行に着目して、真理値表から論理回路を作る方法を紹介しました。例えば、論理関数 $f(x,\ y,\ z)$ の真理値表が右のようなものであった場合、$f(x,\ y,\ z)$ の値が1となる $(x,\ y,\ z)$ の値に注目すると、$(x,\ y,\ z) = (0,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$, の3通りあり、それぞれの場合に対応する $\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}$, $x\cdot\bar{y}\cdot z$, $x\cdot y\cdot z$ という3つの論理式の論理和をとって、

$$\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}\ +\ x\cdot\bar{y}\cdot z\ +\ x\cdot y\cdot z$$

という論理式で $f(x,\ y,\ z)$ を表すことができます。

前回はここから論理回路を作成しましたが、見方を変えると、このことは、どのような論理式も、このような形の論理式と同値となることを意味しています。このような形の論理式は「(主) 論理和標準形」と呼ばれ、どのような論理式も (主) 論理和標準形に変形することが可能です。論理和標準形や主論理和標準形の正確な定義は後程説明しますが、この変形により、容易に真理値表を作成することができるようになります。

リテラルと積項　一般に、論理変数および、その否定の形の論理式を**リテラル (literal)** と呼びます。例えば、次のようなものがリテラルです。

$$x,\quad \bar{x},\quad y,\quad \bar{y},\quad z,\quad \bar{z},\quad \ldots$$

論理定数1、リテラル単体、あるいは2個以上のリテラルの論理積の形になっている論理式を**積項**[1]と呼びます。積項とは0個以上のリテラルの論理積と考えることができます。例えば、次のような形の論理式が積項となります。

$$1,\quad x,\quad \bar{x},\quad x\cdot\bar{x},\quad \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z},\quad x\cdot\bar{y}\cdot y\cdot z,\quad x\cdot\bar{y}\cdot x\cdot z$$

メモ

[1] この授業では論理定数1も積項とみなしますが、論理定数1を積項と呼ばないこともあります。

論理和標準形　論理定数 0、積項単体、あるいは 2 個以上の積項の論理和の形を**論理和標準形**[2]と呼びます。論理和標準形は 0 個以上の積項の論理和の形と考えることができます。例えば、次のような形の論理式は、すべて論理和標準形です。

$$0, \quad 1, \quad x, \quad \bar{x}, \quad x \cdot \bar{y}, \quad 1 + x + x \cdot \bar{y}, \quad x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{x} \cdot \bar{z}, \quad x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{x} + \bar{z} \cdot z \cdot y$$

メモ

5.2　論理式の論理和標準形への変形

つぎのような手順を順に実行することにより、どのような論理式もそれと同値な論理和標準形の論理式に変換することができます。

(1) 否定、論理積、論理和以外の論理演算子 (例えば $\oplus$) があれば、それを、否定、論理積、論理和のみで表した同値な論理式で置き換え、否定、論理積、論理和以外の論理演算子をなくす。

(2) $\overline{F \cdot G}$ の形や $\overline{F + G}$ の形の論理式を、それぞれ $\overline{F} + \overline{G}$ と $\overline{F} \cdot \overline{G}$ で置き換えて、このような形の論理式をなくす。この手順が終ると、否定 $^{-}$ は、論理変数または論理定数に対して何回か適用した形でのみ現れるようになります。

(3) $\overline{\overline{F}}$ の形の論理式を F で置き換えて、このような形の論理式をなくす。

(4) $\overline{1}$ や $\overline{0}$ を、それぞれ 0 と 1 で置き換えて、このような形の論理式をなくす。この手順が終ると、否定 $^{-}$ は、リテラルの形でのみ現れるようになります。

(5) $0 \cdot F$ や $F \cdot 0$ など、0 を含む論理積の形の論理式を 0 で、$1 + F$ や $F + 1$ など 1 を含む論理和の形の論理式を 1 で、それぞれ置き換える。また、同様に $1 \cdot F$ や $F \cdot 1$、$0 + F$、$F + 0$ の形の論理式を F で置き換える。

(6) $F \cdot (G + H)$ の形や $(F + G) \cdot H$ の形の論理式があれば、それぞれ $(F \cdot G) + (F \cdot H)$ と $(F \cdot H) + (G \cdot H)$ で置き換えて、このような形の論理式をなくす。

メモ

[2]**選言標準形**、**加法標準形**、**積和標準形**などと呼ぶこともあります。この授業では論理定数 0 も論理和標準形とみなしますが、論理定数 0 を論理和標準形とはみなさないこともあります。

以上の手順に従うと、必ず論理和標準形にすることができますが、得られる論理和標準形の論理式は1通りとは限らないことに注意してください。また、すべての手順を適用できる限り適用するのなら、(1) から (6) までの手順は並行して適用しても構いません。

任意の論理変数 x を1つ選んで、あらかじめ論理式の中に現れている1を $x+\bar{x}$ で置き換え、同様に、0を $x\cdot\bar{x}$ で置き換えると、論理定数を含まない論理和標準形にすることもできます。

論理和標準形への変形の例1

$$
\begin{aligned}
z\cdot\overline{\bar{x}+y}\cdot\overline{\bar{0}\cdot x}\cdot(\bar{z}+x) &= z\cdot\bar{\bar{x}}\cdot\bar{y}\cdot(\bar{\bar{0}}+\bar{x})\cdot(\bar{z}+x) \\
&= z\cdot x\cdot\bar{y}\cdot(\bar{0}+\bar{x})\cdot(\bar{z}+x) \\
&= z\cdot x\cdot\bar{y}\cdot(1+\bar{x})\cdot(\bar{z}+x) \\
&= z\cdot x\cdot\bar{y}\cdot 1\cdot(\bar{z}+x) \\
&= z\cdot x\cdot\bar{y}\cdot(\bar{z}+x) \\
&= z\cdot x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}+z\cdot x\cdot\bar{y}\cdot x
\end{aligned}
$$

これで、論理和標準形となりましたが、論理式を簡単化することで、さらに $z\cdot x\cdot\bar{y}$ と変形しても構いません。

論理和標準形への変形の例2

$$
\begin{aligned}
&((\bar{y}+z)\cdot(\bar{z}+y)+x)\cdot\overline{x\cdot\bar{z}} \\
&\quad= ((\bar{y}+z)\cdot(\bar{z}+y)+x)\cdot(\bar{x}+\bar{\bar{z}}) \\
&\quad= ((\bar{y}+z)\cdot(\bar{z}+y)+x)\cdot(\bar{x}+z) \\
&\quad= (\bar{y}\cdot\bar{z}+\bar{y}\cdot y+z\cdot\bar{z}+z\cdot y+x)\cdot(\bar{x}+z) \\
&\quad= \bar{y}\cdot\bar{z}\cdot\bar{x}+\bar{y}\cdot y\cdot\bar{x}+z\cdot\bar{z}\cdot\bar{x}+z\cdot y\cdot\bar{x}+x\cdot\bar{x} \\
&\qquad +\bar{y}\cdot\bar{z}\cdot z+\bar{y}\cdot y\cdot z+z\cdot\bar{z}\cdot z+z\cdot y\cdot z+x\cdot z
\end{aligned}
$$

ここでも、さらに変形して、$\bar{y}\cdot\bar{z}\cdot\bar{x}+z\cdot y\cdot\bar{x}+y\cdot z+x\cdot z$ とすることもできます。

メモ

5.3 最小項と主論理和標準形

いくつかの (1個以上の) リテラルの論理積で、いま考えている論理変数をすべて含み、同じ論理変数が2回以上現れないものを**最小項 (minterm)**[3]と呼びます。例えば、論理変数として、x、y、z の3つを考えているのなら、最小項は、(リテラルの並ぶ順番を無視すると) 次の8通りあります。

$$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z},\quad \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z,\quad \bar{x}\cdot y\cdot\bar{z},\quad \bar{x}\cdot y\cdot z,\quad x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z},\quad x\cdot\bar{y}\cdot z,\quad x\cdot y\cdot\bar{z},\quad x\cdot y\cdot z$$

[3]極小項と呼ぶこともあります。

同様に、論理変数が1つなら2通り、2つなら4通り、一般に、n 個の論理変数がある場合は、(リテラルが並ぶ順番を無視すると) 2^n 通りの最小項が存在します。

論理式が、(リテラルの並ぶ順番を無視しても) 重複のない1個以上の最小項の論理和の形[4]をしているか、あるいはその論理式全体が0であるとき、その論理式は**主論理和標準形 (principal disjunctive normal form)**[5]であると言います。

例えば、3つの論理変数 x、y、z を考えている場合、次のようなものが主論理和標準形の例となります。

$$0, \quad x \cdot \bar{y} \cdot z, \quad \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z, \quad \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z}$$

論理変数の数が n 個であるとき、(リテラルの並ぶ順番を無視すると) 最小項は 2^n 通りありますので、(最小項が並ぶ順番を無視すると) 主論理和標準形の論理式は 2^{2^n} 通り存在します。

メモ

5.4 論理式の主論理和標準形への変形

論理式を主論理和標準形へ変形する場合は、まず論理和標準形に変形して、さらに次の手順に従います。

(7) 論理和標準形は積項を0個以上論理和でつないだ形をしていますが、その積項に、ある変数とその否定を両方含んでいるもの (例えば、$x \cdot z \cdot \bar{x}$) があれば、それを消去します (論理和をとる対象から取り除きます)。もし、すべての積項が消去されてしまう場合は、全体の論理式を 0 で置き換えて、これを主論理和標準形とします。

(8) 積項に同じリテラルが複数回現れていれば、それを1つだけ残して余分なものを消去します (例えば、$\bar{x} \cdot z \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}$ を $\bar{x} \cdot z \cdot \bar{y}$ に置き換えます)。

(9) 積項に、ある変数 x が現れていないもの t があれば、t を $t \cdot x + t \cdot \bar{x}$ で置き換えます (例えば、いま考えている変数が x、y、z の3つであるとき、$x \cdot \bar{z}$ を $x \cdot \bar{z} \cdot y + x \cdot \bar{z} \cdot \bar{y}$ に置き換えます)。この特別な場合として t が1ならば、1を $x + \bar{x}$ で置き換えます。これを繰り返すことで、論理式全体はいくつかの最小項の論理和の形になります。

(10) 論理式に現れている最小項に同値なもの (リテラルの並ぶ順だけが異なるもの) があれば、1つだけ残して、余分なものは消去します。

[4]単体の最小項も、1個の最小項の論理和と考えます。

[5]そもそも、主論理和標準形のみを「論理和標準形」と呼ぶこともあります。

以上の手順を終えると、論理式全体が主論理和標準形になります。例えば、ある論理式の論理和標準形として、$y \cdot z + \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot y + z \cdot y \cdot \overline{x} + x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot y$ が得られている場合、さらに

$$
\begin{aligned}
& y \cdot z + \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot y + z \cdot y \cdot \overline{x} + x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot y \\
&\quad = \quad y \cdot z + z \cdot y \cdot \overline{x} + x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot y \\
&\quad = \quad y \cdot z + z \cdot y \cdot \overline{x} + x \cdot y \cdot \overline{z} \\
&\quad = \quad y \cdot z \cdot x + y \cdot z \cdot \overline{x} + z \cdot y \cdot \overline{x} + x \cdot y \cdot \overline{z} \\
&\quad = \quad y \cdot z \cdot x + y \cdot z \cdot \overline{x} + x \cdot y \cdot \overline{z}
\end{aligned}
$$

のように変形することで主論理和標準形を得ることができます。

また、論理和標準形として、例えば $\overline{y} \cdot \overline{z} \cdot y + z \cdot y \cdot \overline{z} \cdot x \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{x}$ が得られている場合は、すべての積項に、それぞれ、ある変数とその否定が含まれていますので、この論理式の主論理和標準形は 0 とできます。

メモ

5.5 論理積標準形と主論理積標準形

この授業では特に解説することはしませんが、論理和標準形や主論理和標準形と双対な概念として、**論理積標準形**や**主論理積標準形**というものもあります。その定義や変形の手順は、論理和標準形や主論理和標準形に関する定義や手順の中の論理積 ($\cdot$) と論理和 ($+$) とを交換し、それと同時に 1 と 0 とを交換したものとなります。

メモ

計算機システム I・第 5 回・終わり