計算機システム I ・第 2 回

2022 年 4 月 20 日

今回の内容

2.1　論理演算の性質

論理演算には次のような性質 (法則) があります。

(交換律)	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
(結合律)	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
(吸収律)	$x \cdot (x + y) = x$	$x + (x \cdot y) = x$
(分配律)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
(相補律)	$x \cdot \bar{x} = 0$	$x + \bar{x} = 1$

(冪等律)	$x \cdot x = x$	$x + x = x$
(ド・モルガン律)	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
(二重否定律)	$\bar{\bar{x}} = x$	
(その他)	$\bar{1} = 0$	$\bar{0} = 1$
	$0 \cdot x = 0$	$1 + x = 1$
	$1 \cdot x = x$	$0 + x = x$
	$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$	$x + (\bar{x} \cdot y) = x + y$

交換律と結合律が成り立ちますので、$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$ や $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ の形の論理式は、$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ の並べ方を変えても (元の論理式と) 同値となります。

メモ

双対性　以上の法則では、論理積 $\cdot$ と論理和 $+$ とを、また 1 と 0 とを、それぞれ相互に置き換えても、同じ法則が成立している (**双対性 (duality)**[1]がある) ことに注意してください。論理積 $\cdot$ と論理和 $+$ という 2 つの論理演算は、そのどちらか一方があれば、否定を使って、次のようにもう一方を表現することができます。

(論理和と否定による論理積の表現)	$x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$
(論理積と否定による論理和の表現)	$x + y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$

メモ

2.2　論理法則とブール代数

前節で紹介したような性質 (法則) が成り立つのは、真理値とそれに関する論理演算の世界だけではありません。ある集合 U があったとき、U の部分集合をすべて集めてできる集合を、U の**冪 (べき) 集合 (power set)**[2]と呼びます。例えば、U が α、β、γ という相異なる 3 つの要素で構成されている場合、U の冪集合は

$$\Big\{ \{\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\gamma, \alpha\}, \{\alpha, \beta, \gamma\} \Big\}$$

となります。一般に、ある集合 U の冪集合 S を考え、

0	$=$	$\{\}$	(空集合)
1	$=$	U	(全体集合)
$\bar{x}$	$=$	x^c	(全体集合 U に対する x の補集合)
$x \cdot y$	$=$	$x \cap y$	(x と y の共通部分)
$x + y$	$=$	$x \cup y$	(x と y の和集合)

と定義すると、1 ページに紹介した性質がすべて成り立ちます。つまり、ある集合の部分集合全体に関する上に定義したような集合演算の世界と、真理値に関する論理演算の世界は共通の性質を持っています。

メモ

[1]「双対」は、「相対 (そうたい)」と区別がつくように、通常「そうつい」と発音します。

[2]「冪集合」を「巾集合」と書く場合もあります。

ブール代数　一般に、ある集合 S があって、S の要素に対する演算がいくつか定められているとき、集合 S とそれらの演算の組を**代数系**と呼びます。また、ある集合 S の要素の中に 0 および 1 と呼ばれる要素が含まれていて、$\bar{\ }$、$\cdot$、$+$ という 3 つの演算が定義されており、以下に示す (交換律) から (相補律) までの法則が成り立っているとき、この代数系は**ブール代数 (Boolean algebra)** であると言います。

ブール代数の公理

(交換律)	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
(結合律)	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
(吸収律)	$x \cdot (x + y) = x$	$x + (x \cdot y) = x$
(分配律)	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
(相補律)	$x \cdot \bar{x} = 0$	$x + \bar{x} = 1$

この (交換律) から (相補律) までの性質をブール代数の公理と呼び[3]、ここからブール代数すべてに共通する性質を導き出すことができます。この科目では、これらの公理を満たしているものをブール代数と呼ぶことにしますが、これに加えて S が 2 つ以上の要素を持つ場合のみブール代数と呼んだり、S がちょうど 2 つの要素を持つ場合のみブール代数と呼ぶこともありますので注意してください。

メモ

真理値の集合 $\{0, 1\}$ に対する 3 つの論理演算 (否定、論理積、論理和) が作る代数系も、ある集合の冪集合に対する前ページで定義したような 3 つの集合演算 (補集合をとる、共通部分をとる、和集合をとる) が作る代数系も、ブール代数の公理をすべて満たしていますので、どちらもブール代数となります。

つまり、真理値と部分集合という 2 つの世界には次のような対応関係があり、どちらの世界でも 1 ページで紹介した性質 (法則) が成り立ちます。これらの共通した性質は、ブール代数の公理からすべて導き出すことができます。

ブール代数	0	1	$\bar{\ }$	$\cdot$	$+$
真理値	偽 (0)	真 (1)	否定	論理積	論理和
部分集合	空集合	全体集合	補集合	共通部分	和集合

[3] ブール代数の公理の選び方は 1 通りではなく、ここで示したもの以外に等価なものがたくさん考えられます。

真理値の世界と部分集合の世界との違いは要素の数です。真理値の世界には真 (1) と偽 (0) の 2 つの値だけが存在しますが、部分集合の世界にどれだけの値が存在するかは、全体集合の大きさによってさまざまです。全体集合 U が空集合なら、その冪集合の要素は空集合のみとなり、ただ 1 つの値からなるブール代数となり、0 も 1 もこの空集合を表すことになります[4]。U の要素がただ 1 つの場合は、冪集合は空集合と U 自体の 2 つの要素からなりますので、ちょうど 2 つの値から構成されるブール代数となり、真理値が作るブール代数と実質的に同じものになります。

メモ

計算機システム I・第 2 回・終わり

[4] 1 つの値だけからなる代数系は、1 ページに挙げた性質を必ず満たしますから、このようなブール代数を考えることにあまり意味はありません。

付録: ブール代数の性質の導出

以下の導出では、特に断りなく交換律と結合律を用いています。双対となる法則の片方の導出しか行っていませんが、もう一方も同様に導けることに注意してください。

冪等律 $x \cdot x = x$ の導出　$(x + x = x$ も同様)

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x \cdot (x + x \cdot y) && (\because \text{吸収律より } x = x + x \cdot y\ ) \\ &= x && (\because \text{吸収律 } x \cdot (x+y) = x \text{ の } y \text{ に } x \cdot y \text{ を代入}) \end{aligned}$$

$0 \cdot x = 0$ の導出　$(1 + x = 1$ も同様)

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= \bar{x} \cdot x \cdot x && (\because \text{相補律より } 0 = \bar{x} \cdot x) \\ &= \bar{x} \cdot x && (\because \text{冪等律}\ ) \\ &= 0 && (\because \text{相補律}\ ) \end{aligned}$$

$1 \cdot x = x$ の導出　$(0 + x = x$ も同様)

$$\begin{aligned} 1 \cdot x &= (\bar{x} + x) \cdot x && (\because \text{相補律より } 1 = \bar{x} + x) \\ &= x && (\because \text{吸収律}\ ) \end{aligned}$$

$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$ の導出　$(x + \bar{x} \cdot y = x + y$ も同様)

$$\begin{aligned} x \cdot (\bar{x} + y) &= x \cdot \bar{x} + x \cdot y && (\because \text{分配律}\ ) \\ &= 0 + x \cdot y && (\because \text{相補律}\ ) \\ &= x \cdot y && (\because \text{法則 } 0 + x = x \text{ の } x \text{ に } x \cdot y \text{ を代入}) \end{aligned}$$

補題　$x \cdot y = 0$ かつ $x + y = 1$ ならば $\bar{x} = y$

(証明) $x \cdot y = 0$ と $x + y = 1$ が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x} \cdot 1 && (\because \text{法則 } 1 \cdot x = x \text{ の } x \text{ に } \bar{x} \text{ を代入}) \\ &= \bar{x} \cdot (x + y) && (\because \text{仮定より } 1 = x + y) \\ &= \bar{x} \cdot x + \bar{x} \cdot y && (\because \text{分配律}\ ) \\ &= 0 + \bar{x} \cdot y && (\because \text{相補律より } \bar{x} \cdot x = 0) \\ &= x \cdot y + \bar{x} \cdot y && (\because \text{仮定より } 0 = x \cdot y) \\ &= (x + \bar{x}) \cdot y && (\because \text{分配律}\ ) \\ &= 1 \cdot y && (\because \text{相補律}\ ) \\ &= y && (\because \text{法則 } 1 \cdot x = x \text{ の } x \text{ に } y \text{ を代入}) \end{aligned}$$

(証明終り)

二重否定律 $\bar{\bar{x}} = x$ の導出

相補律より、$\bar{x} \cdot x = 0$ と $\bar{x} + x = 1$ が成り立つから、補題より、$\bar{\bar{x}} = x$ が導ける。

ド・モルガン律 $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$ の導出 $(\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ も同様$)$

補題が成り立つので、$(x \cdot y) + (\bar{x} + \bar{y}) = 1$ と $(x \cdot y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = 0$ を示せばよい。

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) + (\bar{x} + \bar{y}) &= (x + \bar{x} + \bar{y}) \cdot (y + \bar{x} + \bar{y}) && (\because \text{分配律}) \\
&= (1 + \bar{y}) \cdot (1 + \bar{x}) && (\because \text{相補律}) \\
&= 1 \cdot 1 && (\because \text{法則}\ \ 1 + x = 1) \\
&= 1 && (\because \text{冪等律})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) &= (x \cdot y \cdot \bar{x}) + (x \cdot y \cdot \bar{y}) && (\because \text{分配律}) \\
&= (0 \cdot y) + (x \cdot 0) && (\because \text{相補律}) \\
&= 0 + 0 && (\because \text{法則}\ \ 0 \cdot x = 0) \\
&= 0 && (\because \text{冪等律})
\end{aligned}
$$

$\overline{1} = 0$ の導出 $(\overline{0} = 1$ も同様$)$

$1 \cdot 0 = 0$ と $1 + 0 = 1$ が成り立つから、補題より、$\overline{1} = 0$ が導ける。